



AALBORG UNIVERSITY

DENMARK

P2 PROJEKT
MATEMATIK-TEKNOLOGI

Anvendt Linear Algebra inden for teknologi

Renhed af lyd

Forfattere:

Anders Brøsted Jensen
Casper Tinggaard Kjeldsen
Christian Dausel Jensen
Katja Valérie Bonvin
Mads Lindeborg Larsen
Mikkel Lundsgaard Brøndt
Nikolai Lund Kühne

Vejleder:

Jan Østergaard

26. maj 2021



AALBORG UNIVERSITY
STUDENT REPORT

Første Studieår v/ Det Ingeniør- Og
Naturvidenskabelige Fakultet
Matematik-Teknologi
Strandvejen 12-14
9000 Aalborg

Titel:

Anvendt lineær algebra inden for
teknologi.

Projekt:

P2-projekt

Projektperiode:

Feb 2021 - Maj 2021

Projektgruppe:

A409

Deltagere:

Anders Brøsted Jensen
Casper Tinggaard Kjeldsen
Christian Dausel Jensen
Katja Valérie Bonvin
Mads Lindeborg Larsen
Mikkel Lundsgaard Brøndt
Nikolai Lund Kühne

Vejleder:

Jan Østergaard

Oplagstal: 1

Sidetæl: 90

Afsluttet dato: 27-05-2021

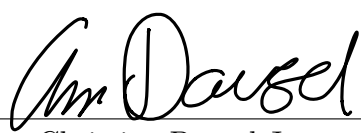
Abstract:

This project examines theories in linear algebra, signals and systems, speech signal, SVD, the Discrete Fourier Transform, and data collection, thus desiring to apply the theoretical knowledge to develop a method qualified of reducing unwanted noise apart from the original voice signal. Hence, the tools will be applied to convert analog signals to discrete, digital signals through S/H and A/D. Furthermore, the discretized signals will be transformed with the Discrete Fourier Transform, thus converting the finite sequence of equally spaced samples of an artificial signal into a complex-valued function of frequency. Additionally, the newly transformed signal will be matrix factorized by applying Singular Value Decomposition. As a result, the Σ matrix is obtained and processed by eliminating small singular values, therefore, factorizing the white noise out. Lastly, the function of frequency is inversed back to a function of time using the Inverse Discrete Fourier Transform. Finally, this method is tested on artificial signals, which gradually will be more complex and qualify to fit a real speech signal. To reflect and optimize our method the quality and inconsistencies are discussed, and the success of the thesis statement will be evaluated.

Forord


Anders Brøsted Jensen

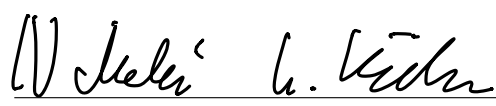

Casper Tinggaard Kjeldsen


Christian Dausel Jensen


Katja Valérie Bonvin


Mads Lindeborg Larsen


Mikkel Lundsgaard Brøndt


Nikolai Lund Kühne

Indholdsfortegnelse

1	Problemanalyse	2
1.1	Indledning	2
1.2	Problemafgrænsning	3
1.3	Det initierende problem	3
1.4	Testkrav	3
1.5	Problemformulering	3
2	Lineær algebra	4
2.1	Matricer	4
2.1.1	Fra ligningssystem til Matrix	4
2.1.2	Linearkombination	5
2.1.3	Regneregler, Addition, Multiplikation	6
2.1.4	Rækkeoperationer	9
2.1.5	Identitetsmatricer	11
2.1.6	Transponering	13
2.1.7	Invertible Matricer	14
2.1.8	Determinanten	16
2.1.9	Det indre produkt	19
2.1.10	Ortogonale matricer	19
2.2	Egenvektorer, egenverdier og underrum	22
2.3	Diagonalisering	25
2.4	Singular value decomposition	28
3	Signaler og modeller	36
3.1	Modeller	36
3.2	Systemer	36
3.3	Signaler	37
3.4	LTI-system	38

4	Dataopsamling	41
4.1	Sensor	41
4.1.1	Mikrofon	41
4.2	Sampling	42
4.2.1	Samplingsfrekvens og aliasering	43
4.2.2	Kvantisering	45
5	Fourieranalyse	46
5.1	Den Diskrete Fourier Transformation (DFT)	46
5.2	Foldning	52
5.3	DFT under forsøget	58
6	Talesignal	59
6.1	Talesignal	59
6.2	Støj	61
6.2.1	Hvid støj	62
7	Metode	63
8	Forsøg	65
8.1	Forsøgsbeskrivelse	65
8.2	Forsøgsresultater	66
9	Diskussion	71
9.1	Systematiske fejl	71
9.2	Diskussion af samplingsfrekvensen	72
9.3	Fejl ved sampling	72
9.4	Forsøget og testkravene	73
10	Konklusion	74
	Appendiks	78
A	Dataopsamling	79
B	Talesignal	81
C	Delforsøg 1	83
D	Delforsøg 2	86
E	Delforsøg 3	89

Symbol	Betydning	Enhed
λ	Egenværdi for en matrix A	Hz
$\text{Nul}(A)$	Nulrummet for en matrix A	
I	Identitetsmatricen	
$\mathbb{R}^n$	Et reelt vektorrum med dimension n	
$\mathbb{R}_+$	Alle positive reelle tal	
$\mathbb{Z}$	Alle heltal	
δ	Dirac Delta	
δ_{ij}	Kroneckers Delta	
T_s	Tidskontante samplingstid	
ω_s	Samplingsfrekvens	
$Y(\omega)$	Den kontinuerte Fourier Transformation	
$\mathbb{C}^N$	Mængden af alle sekvenser (komplekse og reelle)	
$\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}$	Den Diskrete Fourier Transformation	
$\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1}$	Den Inverse Diskrete Fourier Transformation	
Ω_N	Fouriermatricen	
$\mathbb{C}$	Komplekse tal	
$\mathbb{R}$	Alle reelle tal	
$\mathcal{L}_2$	Kvadratisk integrable funktioner/signaler.	

Tabel 1: Liste over symboler, der bliver brugt i projektet.

1 | Problemanalyse

1.1 Indledning

Før coronakrisen ramte Danmark, var der omkring 70.000 ansatte, som skulle arbejde hjemmefra. Siden da, er danske virksomheder blevet tvunget til at hemsende danskerne, og under coronakrisen er antallet hjemmearbejdene næsten steget til en halv million [1]. Dette har skabt nye problemer, som virksomhederne ikke har været forberedt på. Det er blandt andet den online kommunikation til de ansatte, som gør det besværligt. Det koster arbejdsmarkedet tid og penge, når der er besværligheder med forbindelsen. En undersøgelse fra analysefirmaet IPSOS har fundet ud af, at 87 procent af hjemmearbejdende har oplevet generende baggrundstøj og har haft brug for at repetere information flere gange under et onlinemøde end normalt. Undersøgelsen viser også, at en permanent hjemmearbejdende dansker, mister cirka 29 minutter af sin arbejds effektivitet om ugen blandt andet på grund af dårlig lyd, og dette skyldes i nogle tilfælde, at information skal gentages flere gange end normalt [2]. Dette problem kan stå på efter krisen, da virksomhederne forventer at have en stigning på 11 procent, i antallet af ansatte, der permanent arbejder hjemmefra. Det vil sige at i fremtiden vil der være yderligere 90.000, som skal være hjemmearbejdende.

Den permanente hjemsending påvirker også de studerende på landets universiteter. Dette er understøttet af en DM-undersøgelse, som fortæller om landets studerende og deres oplevelse med online undervisning. Ud fra undersøgelsen kommer der blandt andet belysning på, at engagement i studiet er blevet påvirket af hjemmeundervisning, og 19 procent af de studerende mener at online undervisning simpelthen fungerer dårligt. Både på arbejdsmarkedet og det online klasselokale kan der findes mange forskellige variable, der er med til at bidrage til den ringere produktivitet. Dette bemærkes også af Ronja Ravnskov, forkvinde for de studerende i DM, "Kvaliteten har været meget svingende og meget afhængig af underviserens digitale kompetencer", der fremhæver at det er et bemærkelsesværdigt problem [3]. Derved, er det både arbejdsmarkedet og universiteterne, som har problemer med at få online kommunikation til at være velfungerende, hvilket har konsekvensen at arbejds effektiviteten falder.

1.2 Problemafgrensning

Ud fra den brede undersøgelse af den online kommunikation skal der understreges, hvad dette projekt vil fokusere på. Formålet er, at kunne anvende lineær algebra som et værktøj til at formindske problematikken, som opstår ved online kommunikation, derved vil vi fokusere på hvad lyd egentlig er, og hvordan lineær algebra kan have en indvirkning på det, samt hvilken slags baggrundsstøj der ønskes at fjernes. Baggrundsstøj er et vidt begreb, som kan være alt. I denne rapport vil baggrundsstøj blive betragtet som en monoton, uønsket lyd, der har en forstyrrende indvirkning. Med den definition kan baggrundsstøj befinde sig i både den digitale og den analoge verden. Inden for den digitale verden vil baggrundsstøj klassificeres som hvid støj, hvilket beskrives yderligere i afsnit 6.2.1. I den virkelige verden findes hvid støj ikke, og derfor anses den virkelige verdens hvide støj som en monoton maskinproduceret lyd, som blandt andet kan fremstilles af en støvsuger.

1.3 Det initierende problem

Hvor godt kan man ved hjælp af lineær algebra filtrere baggrundsstøj?

1.4 Testkrav

For at undersøge hvordan man bearbejder talesignaler i online kommunikation har vi dannet en række forsøg, som vil give et indblik i, hvordan man filtrerer støj ved hjælp af lineær algebra. Forsøgene kræver at dataopsamlingen kommer fra et ensartet miljø, hvoraf muligheden for irrelevante parametre forsvinder. Desuden skal lydfileerne, der optages komme fra en og kun én person med en normaliseret fremgangsmåde, for at forsøgene kan sammenlignes.

Formålet ved at lave flere forsøg er, at det vil skabe et grundlag for en bredere problemformulering, hvis test-forsøgene lykkedes. Derved er hensigten med test-forsøgene at de skal kunne besvare på spørgsmålene:

"Er det overhovedet muligt at fjerne støj?"

"Hvis ja, kan der så filtreres støj fra et simpelt talesignal kun bestående af én vokallyd"

Hvis og kun hvis underspørgsmålene kan besvares, vil forsøget kvalificere sig til den endelige problemformulering.

1.5 Problemformulering

Hvor godt kan man ved hjælp af lineær algebra og den Diskrete Fourier Transformation fjerne baggrundsstøj fra et talesignal uden at forringe signalet?

2 | Lineær algebra

2.1 Matricer

I dette projekt vil vi arbejde med vektorer og matricer ved hjælp af lineær algebra. Dette gøres, idet vores lydsignal kan betragtes som en vektor. Kapitlet er skrevet i kronologisk rækkefølge, hvor man først bliver introduceret til et ligningssystem, og hvordan dette hænger sammen med en matrix. Derefter bliver de mere simple måder at omskrive, addere og multiplicere en matrix på introduceret. Teorien vil gradvist blive mere kompliceret, og den resulterer ud i det lineær algebra, der skal bruges til forsøget. Dette kapitel er baseret på [4].

2.1.1 Fra ligningssystem til Matrix

En matrix er essentielt information overført fra et ligningssystem, som blot er konverteret på en rektangulær form. Her skal det bemærkes at kapitlet arbejder med reelle matricer og ikke komplekse matricer, derved er komplekse tal- og matricer ikke inkluderet i afsnittet.

Definition 2.1 (Matrix)

Lad en Matrix A være et rektangulært talskema af tal:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Her betegner a_{mn} et element, hvor man finder det i den m'te række og n'te søjle. Det betyder, at A har m rækker og n søjler, hvorfor matricen betegnes som en $m \times n$ -matrix. [4, s. 20]

Eksempel 2.1 (Fra ligningssystem til matrix)

Lad dataen være skrevet på et ligningssystem, som overføres til en $m \times n$ -matrix ved hjælp af definition 2.1:

$$\begin{aligned}x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 2, \\x_2 + 4x_3 &= 0, \\2x_1 \quad \quad - 3x_2 &= 9.\end{aligned}$$

Koefficienten af hver variabel kommer til at stå på række sammen i koefficientmatricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Hvis man også medtager højresiden fra ligningssystemet så får man en totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 9 \end{array} \right].$$

Fra definition 2.1 kan vi genkende størrelsen af denne totalmatrix, som har 3 rækker og 4 søjler, derved er det en 3×4 -matrix. En totalmatrix kan noteres med $[A|\mathbf{b}]$ hvor A er koefficientmatricen og $\mathbf{b}$ er den udvidede del, som udgør totalmatricen.

2.1.2 Linearkombination

Linearkombinationer beskriver et sæt af vektorer, som er multipliceret med en skalar og derefter opskrevet som en sum. Definitionen er et værktøj, der både kan bruges til at beskrive vektorernes lineære afhængighed eller uafhængighed, og vil blive anvendt til andre regler, såsom beskrivelsen af en standardmatrix eller multiplikation af matricer.

Definition 2.2 (Linearkombination)

Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ og $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ skalarer. Da siges vektoren $\mathbf{y}$ defineret ved:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k,$$

at være en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ med koefficienter (eller vægte) $c_1, c_2, \dots, c_k$.
[4, s. 46]

Definitionen beskriver altså, at indgangene i vektorerne får tilkoblet sig en skalar. En skalar er en operator, der gør det muligt at lave fortegnsskift og gøre værdierne i vektoren større eller mindre. I mere avancerede tilfælde kan skalar operatoren være med til at fortælle noget om vektorene man arbejder med, såsom lineær afhængighed eller uafhængighed. Indtil videre fokuseres der på at tilkoble en skalar til en vektor.

Eksempel 2.2

Lad $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være søjlevektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Nu kan vi opstille en linearkombination af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Bemærk at der er brugt addition af to matricer for at kunne udføre linearkombinationen, dette beskrives yderligere i definition 2.3 i følgende afsnit.

2.1.3 Regneregler, Addition, Multiplikation

Matricer er som mange andre matematiske elementer og indeholder elementær algebra. Matricers regneregler er dog lidt mindre intuitive. Vi ønsker at kunne arbejde med mere end én matrix, og derved er formålet med dette underafsnit at forstå regnereglerne.

Definition 2.3 (Addition)

Lad A og B være to matricer. De kan adderes sammen hvis og kun hvis de har samme størrelse. Hvis A og B begge er $m \times n$ -matricer, defineres deres sum elementvist og beskrives som en ny matrix C . Generelt for addition af to 2×2 -matricer:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

[4, s. 111]

Eksempel 2.3 (Addition af matricer)

Lad A og B være 3×4 -matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 8 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

jævnfør definition 2.3 vil vi nu få matrix $C = A + B$ på formen:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 0+2 & 4+3 & (-5)+(-4) & 3+8 \\ (-1)+4 & 2+(-3) & 7+3 & 0+5 \\ 6+2 & (-6)+3 & (-3)+7 & 9+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -9 & 11 \\ 3 & -1 & 10 & 5 \\ 8 & -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

For at give en geometrisk forståelse af hvad det egentlig vil sige at addere to matricer

sammen, og hvad det egentlig vil sige generelt at anvende forskellige operatorer på matricer, tager vi to nye søjlevektorer, og viser hvad der sker geometrisk, når de adderes.

Eksempel 2.4 (Addition med søjlevektorer)

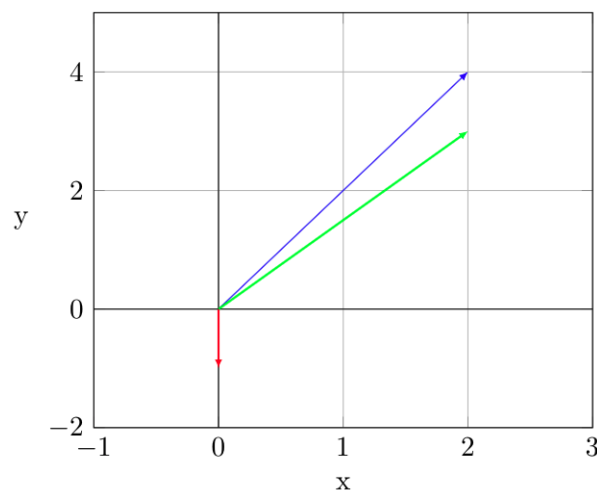
Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ være søjlevektorer, der er givet ved:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Søjlevektorne adderes sammen elementvist:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 + 2 \\ -1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dermed dannes den nye vektor $\mathbf{v}_3$, hvor nu alle tre vektorer illustreres på figur 2.1.



Figur 2.1: Illustration af addition med søjlevektorer.

Ud fra den geometriske form, kan man se at $\mathbf{v}_2$ kun er en nedadgående vektor, som trækker i $\mathbf{v}_1$. Dermed får vi $\mathbf{v}_3$ som den nye vektor, som er en parallelforskydning af $\mathbf{v}_1$ trukket nedad med $\mathbf{v}_2$.

Samme tankegang fra addering af matricer eller søjlevektorer skal bruges til subtraktion. Af denne grund vil der ikke blive brugt tid på eksempler af dette. En lidt mere kompliceret anvendelse af matricer kommer, når man skal multiplicere dem sammen.

Definition 2.4 (Multiplikation)

Lad A være en $m \times n$ -matrix, og B en $n \times p$ -matrix med søjler $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p$. Produktet AB en $m \times p$ -matrix som har rækkerne $A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_p$ er så:

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_p] = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad A\mathbf{b}_p].$$

[4, s. 113]

Eksempel 2.5

Lad A være en 2×2 -matrix og B en 2×3 -matrix. Jævnfør definition 2.4, skal antallet af A 's søjler, være det samme som B 's rækker, før det kan multipliceres sammen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nu skal det multipliceres sammen, hvor B bliver inddelt i søjler $B = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3]$, vi har derfor:

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \\ -1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ -1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Derved har vi at:

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 23 & 13 & 11 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Multiplikation af matricer indeholder mange mellemregninger. Man kan dog eksemplificere de generelle egenskaber for multiplikation af en matrix med små matricer, for at gøre større og mere avancerede eksempler mere overskuelige.

Sætning 2.1 (Egenskaber af Matrix multiplikation)

Lad A , B og C være $m \times n$ -matricer, og lad $r \in \mathbb{R}$ være en skalar. Så kan følgende summer og produkter opstilles:

- $A(BC) = AB(C)$ (associativ lov af multiplikation).
- $A(B + C) = AB + AC$ (venstre distributive lov).
- $(B + C)A = BA + CA$ (højre distributive lov).
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ (for alle skalarer r).
- $I_m A = A = A I_n$.

[4, s. 115]

Pas på med følgende:

- Generelt, så fungerer $AB = BA$ *ikke*, altså er matrixmultiplikationen ikke kommutativ.
- Der er ingen garanti for, at en matrix er *inverterbar*. For eksempel ved $AB = AC$, så er det *ikke* nødvendigvis sandt, at der kan konkluderes, at $B = C$.
- Hvis et produkt AB er en nul-matrix, så kan man ikke konkludere generelt, at enten $A = 0$ eller $B = 0$.

[4, s. 116]

2.1.4 Rækkeoperationer

Dette kapitel handler om rækkereduktions algoritmer, og løsning af ligningssystemer. Den første del er at omskrive et ligningssystem om til en matrix som vist i afsnit 2.1.1, og nu anvendes rækkeoperationer. Ved rækkeoperationer kan man enten opnå en rektangulær matrix på echelon form, hvorefter den yderligere kan reduceres til reduceret echelon form.

For at kunne reducere en matrix til echelon form eller reduceret echelon form, skal der gennemføres det der kaldes *elementære rækkeoperationer*, og de er som følgende:

Elementære rækkeoperationer:

- Ombyt to rækker.
- Skalér en række med en konstant forskellig fra 0.
- Læg et multiplum af én række til en anden.

Disse rækkeoperationer er reversible, hvilket betyder at de kan fortrydes.

[4, s. 22]

Definition 2.5 (Echelon form)

Lad A være en rektangulær matrix, som er skrevet på echelon form, da har den følgende egenskaber:

- Alle nulrækker står til sidst.
- Den ledende koefficient i en række står til højre for den ledende koefficient i rækken ovenover.
- Alle indgange i en søjle under den ledende koefficient er 0.

[4, s. 29]

Definition 2.6 (Reduceret echelon form)

Lad A være en rektangulær matrix, som er skrevet på reduceret echelon form, da har den følgende egenskaber:

- Den er på echelon form.
- Alle ledende koefficienter er 1.
- Alle indgange i en søjle over den ledende koefficient er 0.

[4, s. 29]

Reduceret echelon form skal ses som en udvidelse eller yderligere bearbejdning på echelon formen, derved kommer eksemplet til at tage udgangspunkt i begge, så man kan se sammenhængen.

Eksempel 2.6

Lad A være en $m \times n$ -matrix, og A_E være A på echelon form som i definition 2.5, vi har også pivotindgangene $\blacksquare \neq 0$, og værdien over pivotindgangene kan være hvad som helst, da har vi:

$$A_E = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den efterfølgende matrix er A på reduceret echelon form, A_{RE} , ifølge definition 2.6, hvor $\blacksquare = 1$ og alle indgange i en søjle over den ledende koefficient er 0:

$$A_{RE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transformationen fra $A_E \rightarrow A_{RE}$ er gennemført med rækkeoperationer. Her skal bemærkes at den reducerede echelon form er en unik løsning til echelon formen.

Sætning 2.2 (Reduceret echelon form er unik)

Enhver matrix A er rækkeækvivalent til én og kun én reduceret echelon matrix R .

[4, s. 29]

Denne sætning bevises ikke, men beviset kan findes samme sted som henvisningen til sætning 2.2.

En af de mest praktiske måder at løse et ligningsystem er ved at rækkereducere matricen ned til en reduceret echelon form. Sætning 2.2 er vigtig, da algoritmen til at reducere en echelon matrix ned til en reduceret echelon matrix kan variere, men uanset hvad så vil en echelon matrix altid få den samme reduceret echelon, selvom der kan være forskellige fremgangsmåder til at finde den.

For at give en bedre forståelse af den vigtige algoritme der fremgår i at rækkereducere en matrix til reduceret echelon form, laves følgende eksempel.

Eksempel 2.7 (Fra ligningssystem til reduceret echelon form)

Lad ligningssystemet være:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -2, \\x_2 + 5x_3 &= 2, \\-2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 9.\end{aligned}$$

Denne omskrives nu til en totalmatrix og vi finder den reduceret echelon form, for sidst at skrive løsningen som en vektor: Lad A være totalmatricen:

$$\begin{aligned}A &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & 9 \end{array} \right] \sim r_3 = r_3 + 2r_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right] \sim r_3 = \frac{r_3}{5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim r_2 = r_2 - 5r_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim r_1 = r_1 - 4r_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim r_1 = r_1 - 2r_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].\end{aligned}$$

Dermed er den sidste matrix den reducerede echelon form af matricen og løsning skrives som vektoren:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.5 Identitetsmatricer

Vi er nu nået til de lidt mere avancerede dele af matricer, og for at kunne bearbejde dem skal man vide hvad standardmatricen og identitetsmatricen er. I dette kapitel vil vi derfor komme ind på netop disse.

Definition 2.7 (Standardmatrice)

Lad $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation. Da eksisterer en entydig $m \times n$ -matrix A , sådan at:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Yderligere gælder det, at:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \dots \quad T(\mathbf{e}_n)]. \quad (2.1)$$

I (2.1) er matricen A standardmatricen for T .

[4, s. 88]

Eksempel 2.8 (Standardmatricer)

Lad $\mathbf{x}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Vi kan skrive $\mathbf{x}$ som søjlevektorer, hvoraf $x_1, x_2, \dots, x_n$ vil være den eneste indgang i hver sin søjle, og dermed vil andre værdier være 0:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Her kan man se alle de mulige søjlevektorer, som en linearkombination af skalarerne x_n :

$$\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{e}_i$ betegner vektoren i $\mathbb{R}^n$, hvor indgang i er 1 og resten er 0, dermed har vi:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Dette er med til at vise hvordan identitsmatricen opstår, som har søjler svarende til standardvektorerne $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

Identitsmatricer er kvadratiske matricer, hvis indgange alle er 1 og befinder sig diagonalt fra den ledende pivotindgang, dermed er alle andre værdier end indgangene 0.

Definition 2.8 (Identitetsmatricen)

For ethvert positivt heltal n , er $n \times n$ -identitetsmatricen den matrix med søjler svarende til standardvektorerne $e_1, e_2, \dots, e_n$ i $\mathbb{R}^n$.

[4, s. 87]

2.1.6 Transponering

En anden brugbar operator inden for lineær algebra er transponering. Denne operator vil blive brugt under støjrensningen af vores forsøg, hvorfor vi introducerer den her. Givet vi har en $m \times n$ -matrix A , så er den transponerede af A en $n \times m$ -matrix, betegnet med A^T .

Eksempel 2.9

Lad en matrix A være en $m \times n$ -matrix, så er dens transponerede form en $n \times m$ -matrix, skrevet som A^T , hvor rækkerne bliver til søjler:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Derved er de på transponeret form:

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ligesom med multiplikation af matricer, kan større og mere vanskelige matricer indholde uoverskuelige mellemregninger, derfor introduceres en række egenskaber, der gør det mere overkommeligt at håndtere en transponering.

Sætning 2.3 (Transponering af en matrix egenskaber)

Lad $r \in \mathbb{R}$ og lad A og B være $m \times n$ -matricer, hvis størrelser er passende for følgende summe og produkter:

- $(A^T)^T = A$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(rA)^T = rA^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- Hvis A er inverterbar, er $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

[4, s. 117]

2.1.7 Invertible Matricer

Dette afsnit handler om invertibilitet og hvilke regneregler, der medhører. Det er vigtigt at vide om en matrix er inverterbar, da det fortæller rigtig meget om matricen og dens egenskaber. Desuden bliver princippet bag invertibilitet brugt flere steder i projektet herunder den Diskrete Fourier Transformation.

Definition 2.9

En kvadratisk $n \times n$ -matrix A kaldes *inverterbar*, hvis der eksisterer en unik matrix A^{-1} , som opfylder:

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I_n.$$

Matricen A^{-1} kaldes den *inverse* af A .

[4, s. 121]

Der er mange fordele ved at finde ud af, om en matrix egentlig er inverterbar. Hvis en matrix er inverterbar, så opfylder den det første punkt i sætning 2.4, som betyder, at man har kendskab til, at matricen opfylder alle de andre 11 punkter.

Sætning 2.4

Lad A være en $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er ækvivalente:

1. A er inverterbar.
2. A er rækkeækvivalent med I_n .
3. A har n pivotsøjler.
4. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning.
5. Søjlerne i A er lineært uafhængige.
6. Den lineære transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ er injektiv.
7. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst én løsning for hvert $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$.
8. Søjlerne i A udspænder $\mathbb{R}^n$.
9. Den lineære afbildning $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ afbilder $\mathbb{R}^n$ surjektivt til $\mathbb{R}^n$.
10. Der eksisterer en $n \times n$ -matrix B , så $BA = I_n$.
11. Der eksisterer en $n \times n$ -matrix C , så $AC = I_n$.
12. A^T er en inverterbar matrix.

[4, s. 130]

Desuden er der også en formel for at håndtere små matricer på størrelsen af 2×2 , denne formel kan være praktisk, men også kun brugbar i tilfælde hvor matricen lever op til kravene.

Sætning 2.5 (Beregning af 2×2 -matrix invers)

Lad A være en 2×2 -matrix, hvor $A \neq 0$, så har vi formelen:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Hvor $\det(A)$ er determinanten for A , som kan findes ved:

$$\det(A) = \frac{1}{ad - bc}.$$

Hvis $\det(A) = 0$, så eksisterer A^{-1} ikke. [4, s. 121]

Eksempel 2.10

Lad A være en 2×2 -matrix, hvor vi vil bruge sætning 2.5 til at finde ud af, om A^{-1} eksisterer og dernæst beregne den. Sidst finder vi identitetsmatricen. Vi er givet matricen A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Der testes om den inverse eksisterer, ved at beregne determinanten:

$$\det(A) = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} = \frac{1}{-2}.$$

Determinanten er negativ, men den inverse eksisterer, dermed løser vi eksemplet:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(4) & -\frac{1}{2}(-2) \\ -\frac{1}{2}(-3) & -\frac{1}{2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Når vi tager den inverse og multiplicerer med A , så får vi altid identitetsmatricen:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot -2 + 2 \cdot \frac{3}{2} & 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{-1}{2} \\ 3 \cdot -2 + 4 \cdot \frac{3}{2} & 3 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gælder uanset om man multiplicere den inverse først eller sidst, da:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}A.$$

Eksempel 2.11

Lad A og B være en matrix hver og kontroller at A er inverterbar, hvor B er den inverse af A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Herefter multipliceres de to matricer med hinanden, forskelligt:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((-7) \cdot 2) + (3 \cdot 5) & ((-5) \cdot 2) + (2 \cdot 5) \\ ((-7) \cdot (-3)) + (3 \cdot (-7)) & ((-5) \cdot (-3)) + (2 \cdot (-7)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot (-7)) + ((-3) \cdot (-5)) & (5 \cdot (-7)) + ((-7) \cdot (-5)) \\ (2 \cdot 3) + ((-3) \cdot 2) & (5 \cdot 3) + ((-7) \cdot 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Derved kan vi se at sidste linje i eksempel 2.10 holder, og vi kan konkludere at vores $B = A^{-1}$.

2.1.8 Determinanten

Vi husker fra afsnittet om invertible matricer, 2.1.7, at en 2×2 -matrix er invertibel, hvis og kun hvis dets determinant er forskellig fra nul. Hvis man udvider denne tankegang med determinanten, skal man bruge en definition for determinanten for en $n \times n$ -matrix, hvor netop kofaktorudviklingen vil blive anvendt. Når man vil finde en determinant for A , så skal man gøre det rekursivt, hvilket betyder, at man skal inddele A i mindre matricer og udregne determinanten af den. Så hvis man har en 3×3 -matrix, skal den inddeles i 3 forskellige 2×2 -matricer, hvorpå vi kan bruge sætning 2.5 til at løse dem. Denne fremgangsmåde er meget specifik og kaldes for kofaktorudviklingen.

Definition 2.10 (Determinanter for $n \times n$ -matricer)

Lad A være en $n \times n$ -matrix hvor determinanten er defineret som:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}). \end{aligned}$$

Dette betyder, at determinanten er en sum hvor hvert led er en indgang i første række af A ganget med en underdeterminant. Fortegnet er skiftevis positivt og negativt.

[4, s. 183]

Sætning 2.6 (Kofaktorudviklingen)

Lad A være en $n \times n$ -matrix, hvor determinanten kan findes ved kofaktorudviklingen langs alle rækker og søjler. For $1 \leq i, j \leq n$ gælder der, at for udviklingen gennem den i 'te række er:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in},$$

og for udviklingen gennem den j 'te søjle, er:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

[4, s. 184]

Lad os se på et eksempel, hvor kofaktorudvikling anvendes til at bestemme determinanten for en matrix.

Eksempel 2.12 (Determinant for en 3 x 3 matrix)

Lad A være en 3×3 -matrix hvor vi vil finde $\det(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ifølge definition 2.10 så skal man have første søjle og række a_{11} og danne determinanten derudfra, det vil sige at vi tager 3-tallet i venstre hjørne og danner en 2×2 matrix ud fra den. Dette betyder at alle tal i samme søjle og række som a_{11} bliver fjernet og vi står tilbage med:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & 3 & 2 \\ \cancel{0} & 5 & -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dette gøres for alle tallene på samme række ud fra det tal vi har valgt, her skal bemærkes at for at finde den mest simple løsning muligt, skal man vælge en række/søjle der inkludere flest mulige 0. Vi har de to andre 2×2 matricer som:

$$0 \cdot \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{4} \\ 2 & \cancel{3} & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$4 \cdot \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{4} \\ 2 & 3 & \cancel{2} \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

For at kunne lægge de 3, 2×2 -matricer sammen, skal vi bruge definition 2.10 sidste sætning, som beskriver at fortegnene skiftevis er positivt og negativt, så vi har $(-1)^{i+j}$ i C_{ij} , har vi:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Derved bliver 3×3 -matricen lavet om til disse 2×2 -matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Der simplificeres og bruges formelen fra sætning 2.5 til at løse disse 2×2 -matricer:

$$3 \cdot (-13) - 0 + 4 \cdot (10) = 1.$$

Dermed er

$$\det(A) = 1.$$

[Regler for bestemmelse af determinaten af en $n \times n$ -matrix]

Lad A være en $n \times n$ -matrix:

1. Transponeret matrix: $\det(A)^T = \det(A)$.
2. To rækker (søjler) ombyttes ($A \rightarrow B$) $\Rightarrow \det(B) = -\det(A)$.
3. To ens rækker (søjler) $\Rightarrow \det(A) = 0$.
4. Multiplikation af en række (søjle) med reelt tal ($A \rightarrow B$) $\Rightarrow \det(B) = r \cdot \det(A)$.
5. Addition af et multiplum af en række (søjle) til en anden række (søjle) ($A \rightarrow B$) $\Rightarrow \det(B) = \det(A)$.
6. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
7. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
8. $\det(r \cdot A) = r^n \cdot \det(A)$.
9. $\begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$.
10. $A \cdot I_n = A$.
11. $\det(I_n) = 1$.
12. A er regulær og inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
13. A er singulær og *ikke* inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.

[5, s. 17-18]

2.1.9 Det indre produkt

Vi ønsker i projektet at beskrive diagonalisering og i sidste ende Singular Value Decomposition, som bruges til støjrudecering. Af den grund skal vi introducere skalarproduktet eller det indre produkt, som betegnelsen i denne opgave vil være, eftersom denne regneoperation vil blive anvendt senere i projektet.

Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$, så betegner man $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som $n \times 1$ -matricer. Den transponerede $\mathbf{u}^T$ er en $1 \times n$ -matrix og matrixproduktet $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ er en 1×1 -matrix, som kan skrives som et reelt tal (en skalar). Tallet $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ kaldes det indre produkt af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ og skrives oftest $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Det kaldes også for prikproduktet eller skalarproduktet.

Lad nu: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ så er det indre produkt af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ givet som følgende matrixmultiplikation:

Definition 2.11 (Det indre produkt)

Lad $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være søjlevektorer i $\mathbb{R}^n$, hvoraf $\mathbf{u}^T$ er den transponeret $\mathbf{u}$. Derved kan vi definere det indre produkt som $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}$, som ofte er beskrevet ved $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

[4, s. 348]

2.1.10 Ortogonale matricer

Lad os se på en konkret eksempel på anvendelsen af det indre produkt. Følgende beregninger er baseret på [4, s. 351-352]. Hvis man betragter to vektorer ses det at disse er ortogonale, hvis og kun hvis afstanden fra $\mathbf{u}$ til $\mathbf{v}$ er den samme som afstanden fra $\mathbf{u}$ til $-\mathbf{v}$. Dette svarer til at man gerne vil have at: $(\text{dist}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}))^2 = (\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2$. Disse to udtryk for distancen mellem de to vektorer kan nu skrives ud og det fås at:

$$\begin{aligned} (\text{dist}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}))^2 &= \|\mathbf{u} - (-\mathbf{v})\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2, \\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}), \text{ idet man ved at, } \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

. De samme trin gennemgås nu for $(\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2$:

$$\begin{aligned} (\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v}), \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ud fra dette ses det nu, at $(\text{dist}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}))^2 = (\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2$ vil gælde, hvis og kun hvis $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Det gør sig gældende hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Dette leder os så til definitionen for ortogonale vektorer:

Definition 2.12 (Ortogonale vektorer)

To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er ortogonale, hvis: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
[4, s. 352]

For at kunne definere hvad en ortogonal matrix er, betragtes den følgende sætning. Her skal det noteres, at en ortonormal matrix er en matrix, hvis søjler er ortogonale enhedsvektorer.

Sætning 2.7

En $m \times n$ -matrix har ortonormale søjler, hvis og kun hvis $U^T U = I$.
[4, s. 361]

Bevis

Beviset fuldføres kun for en matrix med begræset størrelse grundet nemmere notation, beviset i det generelle tilfælde har samme fremgangsmåde. Lad U være en $m \times 3$ -matrix,

hvor hver vektor er i $\mathbb{R}^m$. Vi har nu at: $U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]$ og $U^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \end{bmatrix}$. Hvis man

nu betragter $U^T U$ fås det at:

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & u_1^T u_3 \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & u_2^T u_3 \\ u_3^T u_1 & u_3^T u_2 & u_3^T u_3 \end{bmatrix}.$$

Det ses nu at den resulterende matrix er et prikprodukt af de to matricer. Jævnfør definition 2.12 vides det at for at søjlerne af $U^T U$ skal være ortogonale skal følgende gælde:

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_2 = 0. \quad (2.2)$$

Desuden skal søjlerne alle have enhedslængden, hvilket opnås hvis:

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 = 1, \quad \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 = 1. \quad (2.3)$$

Hvis både (2.2) og (2.3) holder, så ses det, at matrixproduktet vil give identitetsmatricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dermed er søjlerne ortonormale hvis og kun hvis $U^T U = I$.

[4, s. 361] ■

Lad os se på et eksempel, hvor vi bruger samme argument som i beviset for at bestemme, om en matrix har ortonormale søjler.

Eksempel 2.13

Lad:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}.$$

For at undersøge om U har ortonormale søjler, betragtes $U^T U$:

$$\begin{aligned} U^T U &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.2 Egenvektorer, egenverdier og underrum

Formålet ved dette afsnit er at beskrive en række elementer, som vil blive brugt til SVD. Derfor startes der ud med introduktionen af generel transformation, da alt andet i dette afsnit er bygget op af transformationer. Dernæst fremkommer egenvektorer og egenverdier, da de er væsentlige for at kunne forstå mellemregningerne til SVD, hvor der til sidst vil komme en beskrivelse af underrum, søjlerum og rangsætningen.

Multiplikation af en matrix på en vektor kan ændre på dimensionen $\mathbb{R}$, dette kan beskrives ved en transformation.

Definition 2.13 (Transformation)

En transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en afbildning, der til hver vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ knytter præcis én vektor $T(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m$.

$\mathbb{R}^n$ kaldes *definitionsområdet*, og $\mathbb{R}^m$ kaldes *dispositionsområdet*.

Nogle gange kaldes $T(\mathbf{v})$ billedet af $\mathbf{v}$ under T .

[4, s. 80]

Sådan en multiplikation kan også ses som en lineær transformation, og vil noteres som $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Selvom transformationen kan flytte vektorer i forskellige retninger, kan der forekomme vektorer som opfører sig specielt, disse kaldes egenvektorer.

Definition 2.14 (Egenvektor og egenverdi)

Lad A være en $n \times n$ -matrix. En vektor $\mathbf{x}$, kaldes en egenvektor til A , hvis $\mathbf{x}$ opfylder:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq 0.$$

Skalaren λ kaldes en tilhørende egenverdi til A . Egenvektorer og egenverdier defineres helt analogt for en lineær operator.

[4, s. 285]

At bestemme egenverdier og egenvektorer kaldes at løse egenverdiproblemet for A . Dette gøres ved at finde den karakteristiske ligning til matrixen A :

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{2.4}$$

Hvor venstresiden er et polynomium af grad n kaldet det karakteristiske polynomium. Løsningerne til den karakteristiske ligning kaldes egenverdierne til matrixen A . For at finde de tilhørende egenvektorer kan en base for nulrummet af $A - \lambda$ findes. Dette underrum kaldes for egenrummet og indeholder nulvektoren og alle egenvektorer til den tilhørende egenverdi. En base for alle nulrummene til alle egenverdierne kan opskrives og på den måde opnås alle egenvektorer til den givne matrix.

Eksempel 2.14

Lad A være en 2×2 -matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egenværdierne til matricen er da givet ved (2.4):

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I \right) &= 0, \\ (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 30 &= 0, \\ (\lambda - 7)(\lambda + 4) &= 0. \end{aligned}$$

Her ses det så at egenværdierne er $\lambda_1 = 7$ og $\lambda_2 = -4$. Egenvektorene findes så:
 $\lambda_1 = 7$:

$$\begin{bmatrix} 1 - 7 & 6 \\ 5 & 2 - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Her ses det så at $x_1 = x_2$, og dermed fås egenvektoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = -4$:

$$\begin{bmatrix} 1 + 4 & 6 \\ 5 & 2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Her ses det så at $x_1 = -\frac{6}{5}x_2$ og dermed fås egenvektoren:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har altså nu fundet egenværdierne: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -4$ og egenvektorene: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sidst vil underrum, søjlerum og rangsætning beskrives. Disse bruges til beskrivelsen af en ortonormal basis, som er nødvendig for at kunne bevise SVD.

Det kan vises at et underrum V har basisvektorer p , så hver basis af V må have præcist p vektorer.

Definition 2.15 (Dimension af underrum)

For et underrum V af $\mathbb{R}^n$ defineres *dimensionen* af V til at være antallet af vektorer i en basis for V . Dimensionen noteres $\dim(V)$.

Per konvention siger vi, at $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

[4, s. 173]

Definition 2.16 (Col(A))

For en matrix $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ definerer vi søjlerummet:

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}.$$

[4, s. 165]

Det vil sige, at søjlerummet er alle vektorer på formen:

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \mathbf{a}_n.$$

Årsagen til at $\text{Col}(A)$ bliver kaldt for søjlerummet er fordi det er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.17 (rank(A))

For en matrix A defineres en rang, $\text{rank}(A)$, til at være dimensionen af $\text{Col}(A)$. Idet en basis for $\text{Col}(A)$ udgøres af A 's pivotsøjler må rangen $\text{rank}(A)$ være antallet af pivotsøjler.

[4, s. 173]

Dette er med til at sige, at idet en basis for $\text{Col}(A)$ udgøres af A 's pivotsøjler, så må rangen, $\text{rank}(A)$, være antallet af pivotsøjler.

Definition 2.18 (Matrixrang)

For en matrix A defineres dens, $\text{rank}(A)$, til at være dimensionen af $\text{Col}(A)$.

[4, s. 173]

2.3 Diagonalisering

I mange tilfælde kan egenverdierne og egenvektorerne af en kvadratisk matrix A beskrives med en brugbar faktorisering, $A = PDP^{-1}$, hvor D er en diagonalmatrix. Faktisk kan en $n \times n$ -matrix A diagonaliseres, hvis den er similær med en diagonalmatrix så $A = PDP^{-1}$, for en invertibel matrix P og en diagonal matrix D .

Sætning 2.8

En $n \times n$ -matrix A kan diagonaliseres hvis, og kun hvis A har n lineært uafhængige egenvektorer.

Faktisk gælder $A = PDP^{-1}$, med D som en diagonalmatrix, hvis og kun hvis, søjlerne af P er n lineært uafhængige egenvektorer af A . I så fald er de diagonale indgange i D egenverdierne til A svarende til egenvektorerne i P .

[4, s. 300]

Bevis

Hvis P er en $n \times n$ -matrix med søjlerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, og D er en diagonal matrix med indgangene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, så gælder det at:

$$AP = A \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \dots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Det gælder også at:

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{v}_1 & \lambda_2 \mathbf{v}_2 & \dots & \lambda_n \mathbf{v}_n \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Hvis der nu antages at $A = PDP^{-1}$ gælder, og matricen P ganges på fra højre på begge sider af lighedstegnet, så fås $AP = PD$. Ligning (2.5) og (2.6) kan derfor sættes lig med hinanden:

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \dots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{v}_1 & \lambda_2 \mathbf{v}_2 & \dots & \lambda_n \mathbf{v}_n \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Hvis søjlerne i matricerne i (2.7) sættes lig med hinanden fås:

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad A\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n. \quad (2.8)$$

Eftersom det blev antaget at $A = PDP^{-1}$, så blev det antaget at P er invertibel, og det må betyde at søjlerne i P , nemlig $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ derfor også er lineært uafhængige. Fordi P er invertibel så kan søjlerne heller ikke være nulvektorer, så viser ligningerne i ligning (2.8) at $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er egenverdierne og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er de tilsvarende egenvektorer, og vi har dermed n lineært uafhængige egenvektorer. Det vil sige at hvis P konstrueres af egenvektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, og de er lineært uafhængige så P er invertibel, og D konstrueres af de tilsvarende egenverdier til matricen A . Så gælder $AP = PD$ og derfor også $A = PDP^{-1}$. ■

Eksempel 2.15

Lad A være en 3×3 -matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi starter med at finde den karakteristiske ligning og egenverdierne til matrixen A . Den karakteristiske ligning er givet ved $\det(A - \lambda I) = 0$, så λ trækkes fra på diagonalen i matrixen A . Vi vælger så den første række i matrixen A for at komme frem til determinanten og sætter den lig med 0:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5 - \lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske ligning udledes ved hjælp af kofaktorudvikling jævnfør sætning 2.6:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & -5 - \lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0.$$

Vi kan nu udregne vores egenverdier til at være 1 og -2 , og egenvektorerne kan regnes ud. Det er vigtigt at være opmærksom på, at vi kommer frem til 3 lineært uafhængige egenvektorer, da vi ellers ifølge sætning 2.8 ikke kan diagonalisere vores matrix. Vi starter med at finde egenvektoren til egenværdien 1:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorerne til egenværdien -2 :

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har nu 3 lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og vi kan nu opskrive vores matrix P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu også opskrive diagonalmatrixen D med egenverdierne til de respektive egenvektorer:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu invertere matrixen P og have den endelige diagonalisering :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den endelige diagonalisering $A = PDP^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4 Singular value decomposition

I afsnit 2.3 blev en metode til at faktorisere en $n \times n$ -matrix udledt. Vi vil dog gerne kunne faktorisere flere typer af matricer. Til dette bruges metoden, Singular Value Decomposition eller SVD. Denne metode kan simpelt beskrives som at dele en matrix op i tre forskellige komponenter:

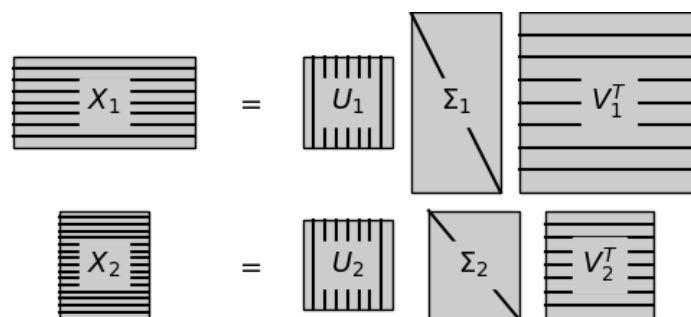
U : En $m \times m$ -ortogonal matrix, som indeholder egenvektorerne for AA^T .

Σ : En $m \times n$ -diagonal matrix. Denne matrix indeholder egenverdierne for AA^T eller $A^T A$.

V^T : En $n \times n$ -ortogonal matrix, som indeholder egenvektorerne for $A^T A$.

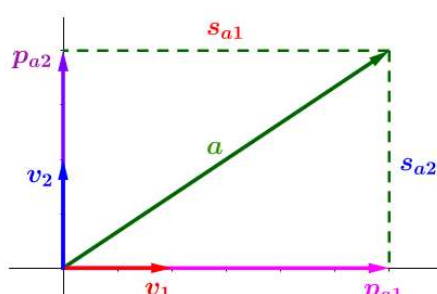
[6]

Man kan visuelt repræsentere dette som på figur 2.2.



Figur 2.2: Visualisering af SVD [7].

Vi kan desuden også betragte figur 2.3, hvor man ser SVD'en repræsenteret ved de forskellige vektorer.



Figur 2.3: SVD vist med vektorer [8]

Her er der blevet lavet en SVD på vektor $\mathbf{a}$. På figur 2.3 ses vektoren $\mathbf{a}$, enhedsvektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{p}_{a1}$ og $\mathbf{p}_{a2}$, som er projektionen af $\mathbf{a}$ på enhedsvektorerne. Desuden ses længden af projektionerne, s_{a1} og s_{a2} . Både $\mathbf{a}$ og enhedsvektorerne skrives nu som vektorer

med x og y koordinater:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Vi ved fra kilde [9], at længden af projektionen kan skrives som prikproduktet af den transponeret vektor $\mathbf{a}$ og enhedsvektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Længderne, s_{a1} og s_{a2} af de projekterede vektorer kan altså skrives som:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_x & a_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} = s_{a1}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_x & a_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} = s_{a2}. \quad (2.10)$$

Vi vil dog gerne kunne udtrykke flere dimensioner, end blot to. Vi omskriver vektorerne $\mathbf{a}^T$, $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ fra (2.9) og (2.10) til en højere dimensions matrix, så $\mathbf{a}^T = A$, som er en $n \times d$ -matrix. n beskriver antal punkter, og d er dimensionen. Enhedsvektorerne bliver omskrevet til en $d \times d$ -matrix V . Længderne af projektionerne bliver samlet i en $n \times d$ -matrix S . Altså kan vi omskrive de to foregående ligninger (2.9) og (2.10) til følgende:

$$AV = S, \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & \cdots \\ b_x & b_y & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{2x} & \cdots \\ v_{1y} & v_{2y} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{a1} & s_{a2} & \cdots \\ s_{b1} & s_{b2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Dette svarer desuden til $A = SV^{-1} = SV^T$, eftersom V består af enhedsvektorer, som er lineært uafhængige må $A = SV^{-1} = SV^T$ gælde, jævnfør sætning 2.4. For at få udtrykket for SVD'en mangler vi dog stadig to komponenter U og Σ . For at opnå dette skal det gælde, at:

$$S = U\Sigma.$$

For at komme frem til dette vil vi gerne normalisere matricen S , (se [4, s. 350]). Matricen skrives nu på følgende måde:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{s_{a1}}{\sigma_1} & \frac{s_{a2}}{\sigma_2} \\ \frac{s_{b1}}{\sigma_1} & \frac{s_{b2}}{\sigma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix},$$

hvor σ_1 og σ_2 er længden af S . σ_1 og σ_2 kaldes for de singulære værdier. Vi definerer nu at: $s_{a1}/\sigma_1 = u_{a1}$, $s_{a2}/\sigma_2 = u_{a2}$, $s_{b1}/\sigma_1 = u_{b1}$ og $s_{b2}/\sigma_2 = u_{b2}$. Vi har altså nu to matricer, som vi definerer som U og Σ :

$$U = \begin{bmatrix} u_{a1} & u_{a2} \\ u_{b1} & u_{b2} \end{bmatrix} \text{ og } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Ved så at indsætte dette i udtrykket for A i (2.11), fås udtrykket for SVD'en:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Hvis vi har et ortonormalt sæt $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$, hvor alle enhedsvektorerne er ortogonale parvist, og W er et underrum spændt ud af sættet, så er $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ en ortonormal basis af W . Så det betyder ifølge sætning 2.7 at vi har lineært uafhængige vektorer i W , som betyder at de er en basis for W og da de er ortogonale er de ortonormale baser.

For at kunne bevise SVD skal vi bruge følgende hjælpesætning.

Sætning 2.9

Lad $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$, som indeholder egenvektorene for $A^T A$ og lad disse være arrangeret således at de tilsvarende egenverdier for $A^T A$ opfylder $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Antag desuden at A har r ikke-nul singulære værdier. Så er $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_r\}$ en ortogonal basis for $\text{Col}(A)$ og $\text{rank}(A) = r$.

[4, s. 434]

Bevis

Idet $\mathbf{v}_i$ og $\lambda_j \mathbf{v}_j$ er ortogonal for $i \neq j$

$$(A\mathbf{v}_i)^T (A\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i^T A^T A \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^T (\lambda_j \mathbf{v}_j) = 0.$$

Altså er $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n\}$ en ortogonal mængde. Endvidere, siden længderne af vektorene $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n$ er de singulære værdier af A og siden der er r ikke-nul singulære værdier, så er $A\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ hvis og kun hvis $1 \leq i \leq r$. Så $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n$ er lineært uafhængige vektorer og de er i $\text{Col}(A)$. For et vilkårligt $\mathbf{y}$ i $\text{Col}(A)$, for eksempel:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \tag{2.12}$$

kan $\mathbf{x}$ i (2.12) skrives som:

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n.$$

Dette indsættes så i $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ og det fås at:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = A\mathbf{x} &= c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2 A\mathbf{v}_2 + \dots + c_r A\mathbf{v}_r + c_{r+1} A\mathbf{v}_{r+1} + \dots + c_n A\mathbf{v}_n \\ &= c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2 A\mathbf{v}_2 + \dots + c_r A\mathbf{v}_r + 0 + \dots + 0. \end{aligned}$$

Altså ligger $\mathbf{y}$ i $\text{Span}\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_r\}$, hvilket viser at $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_r\}$ er en ortogonal basis for $\text{Col}(A)$. Dermed er $\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A) = r$ ifølge definition 2.18. [4, s. 434 - 435] ■

Vi kan nu introducere SVD'en.

Sætning 2.10 (The singular value decomposition)

Lad A være en $m \times n$ -matrix med $\text{rank}(A)$. Så eksisterer der en $m \times m$ -matrix U , som beskrevet i [4, s. 435, (3)], hvor de diagonale indgange i D er de første r singulære værdier af A , $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, og der eksisterer en $m \times m$ -ortogonal matrix U og en $n \times n$ -ortogonal matrix V , sådan at:

$$A = U\Sigma V^T.$$

[4, s. 435]

U 's søjler kaldes de venstre singulære vektorer af A og V 's søjler kaldes de højre singulære vektorer.

Bevis

Lad λ_i og $\mathbf{v}_i$ være som i sætning 2.9, sådan at $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_r\}$ er en ortogonal basis for $\text{Col}(A)$. Normaliser desuden hver $A\mathbf{v}_i$ for at få en ortonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$, hvor:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\|A\mathbf{v}_i\|} A\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i,$$

og

$$A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, (1 \leq i \leq r). \quad (2.13)$$

Udvid nu $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ til en ortonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ af $\mathbb{R}^m$ og lad

$$U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_m], \text{ og } V = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$$

U og V er ortogonale matricer. Det fås fra (2.13) at:

$$\begin{aligned} AV &= [A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2 \ \dots \ A\mathbf{v}_r \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}] \\ &= [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \sigma_1 \mathbf{u}_2 \ \dots \ \sigma_r \mathbf{u}_r \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]. \end{aligned}$$

Lad D være den diagonale matrix med diagonale indgange $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ og lad Σ være som i sætning 2.10:

$$\begin{aligned} U\Sigma &= [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} \\ &= [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \sigma_2 \mathbf{u}_2 \ \dots \ \sigma_r \mathbf{u}_r \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}] = AV. \end{aligned}$$

Siden V er en ortogonal matrix gælder det at:

$$U\Sigma V^T = AVV^T = A.$$

[4, s. 436] ■

Lad os eksemplificere anvendelsen af SVD'en.

Eksempel 2.16

Lad A være en 2×3 -matrix, så:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Det vides fra sætning 2.10 at en SVD er defineret som

$$A = U\Sigma V^T.$$

Ud fra dette opsættes to forskellige matrixprodukter som har til formål at finde de forskellige komponenter i SVD'en. Disse to er:

$$AA^T = \Sigma V^T V \Sigma^T, \text{ og} \\ AV = U\Sigma.$$

I disse to matrixprodukter vil det gøre sig gældende at $U^T U = I$ og $V^T V = I$, hvilket resulterer i at disse ikke er tilstede på højresiden. AA^T betragtes først og det fås at:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}.$$

Det ses at $V\Sigma^T \Sigma V^T$ er en diagonalisering af $A^T A$, hvor egenverdierne er de diagonale indgange i $\Sigma^T \Sigma$ og egenvektorerne er søjlerne af V og V^T . Disse findes nu med (2.4):

$$\begin{aligned} \det(AA^T - \lambda I) &= \det \left(\begin{bmatrix} 17 - \lambda & 8 \\ 8 & 17 - \lambda \end{bmatrix} \right), \\ &= (17 - \lambda)(17 - \lambda) - 64, \\ &= \lambda^2 - 34\lambda + 225, \\ &= (\lambda - 25)(\lambda - 9) = 0. \end{aligned}$$

For at denne skal gå op, ses det at egenverdierne for AA^T er $\lambda = 25$ og $\lambda = 9$.

Nu kan $A^T A$ også betragtes:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix},$$

med denne vides det allerede, at den har de samme egenverdier som for AA^T , dog skal man være opmærksom på at denne har en egenverdi mere. Til at vise dette bruger vi kofaktoriseringsmetoden for at finde egenverdierne ved hjælp af sætning 2.6:

$$\begin{aligned} \det(A^T A - \lambda I) &= \det \left(\begin{bmatrix} 13 - \lambda & 12 & 2 \\ 12 & 13 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & 8 - \lambda \end{bmatrix} \right), \\ &= (13 - \lambda) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 13 - \lambda & -2 \\ -2 & 8 - \lambda \end{bmatrix} \right) - 12 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{bmatrix} \right) + 2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 12 & 13 - \lambda \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right), \\ &= (13 - \lambda)((13 - \lambda)(8 - \lambda) - 4) - 12(100 - 12\lambda) + 2(-24 - 26 + 2\lambda), \\ &= (13 - \lambda)(100 + \lambda^2 - 21\lambda) - 1200 + 144\lambda - 100 + 4\lambda, \\ &= -\lambda^3 + 34\lambda^2 - 373\lambda + 1300 - 1200 + 144\lambda - 100 + 4\lambda, \\ &= -\lambda^3 + 34\lambda^2 - 225\lambda, \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 34\lambda + 225) = -\lambda((\lambda - 25)(\lambda - 9)) = 0. \end{aligned}$$

Man ser altså ud fra dette at denne har de samme to løsninger som ved AA^T , altså $\lambda = 25$ og $\lambda = 9$, man kan også se at den har løsningen $\lambda = 0$. Da vi nu kender til egenværdierne $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 3$ og $\lambda_3 = 0$, kan vi også finde singulærværdierne, idet de ifølge [4, s. 434] er givet ved $\sqrt{\lambda}$:

$$\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,$$

$$\sigma_2 = \sqrt{9} = 3,$$

$$\sigma_3 = \sqrt{0} = 0.$$

Vi ved fra [4, s. 435], at Σ er en $m \times n$ -matrix, hvor en diagonal $r \times r$ -matrix D indgår som indeholder ikke-nul singulær værdierne. Vi ved da også at der er ekstra nulrækker på Σ , hvor antallet er givet ved: $m - r$ rækker, og $n - r$ søjler. Hvis vi nu betragter vores matrix A , ses det at $m = 2$, $n = 3$ og $r = 3$. Dermed vil Σ blive en 2×3 -matrix:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

For nu at finde egenvektorerne skal der findes vektorer, som ligger i $\text{Nul}(A)$, altså løses ligningerne $A^T A - 25I = \mathbf{0}$, $A^T A - 9I = \mathbf{0}$ og $A^T A = \mathbf{0}$

$A^T A - 25I = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} -12 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & -12 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -17 & 0 \end{array} \right] &\sim r_2 \text{ og } r_3 \text{ bytter plads,} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -12 & 12 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -17 & 0 \\ 12 & -12 & -2 & 0 \end{array} \right] &\sim r_3 = r_3 + r_1 \left[\begin{array}{ccc|c} -12 & 12 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim r_1 = -\frac{1}{12}r_1, r_2 = r_2 - 2r_1, \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{50}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] &\sim r_2 = -\frac{3}{50}r_2, r_1 = r_1 + \frac{1}{6}r_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Ud fra dette fås det så at: $x_1 = x_2$ samt $x_3 = 0$ og dermed at:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Idet vi gerne vil have at $\mathbf{v}_1$ er en enhedsvektor normaliser vi denne og det fås at:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}.$$

Altså vil enhedsvektoren for denne være:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$A^T A - 9I = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] &\sim r_2 = r_2 - 3r_1, r_3 = r_3 - \frac{1}{2}r_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & -32 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim r_1 = \frac{1}{4}r_1, r_2 = -\frac{1}{32}r_2, r_3 = -\frac{1}{8}r_3, \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right] &\sim r_1 = r_1 - 3r_2, r_3 = r_3 - r_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Det fås altså at $x_1 = \frac{1}{4}x_3$ og $x_2 = -\frac{1}{4}x_3$ og dermed at:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi igen have denne til at være en enhedsvektor, så denne normaliseres ligeledes og det fås at:

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18}.$$

Altså vil enhedsvektoren være:

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}.$$

$A^T A = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & 13 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & 0 \end{array} \right] &\sim r_2 = r_2 - \frac{12}{13}r_1, r_3 = r_3 - \frac{2}{13}r_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & -\frac{50}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{50}{13} & \frac{100}{13} & 0 \end{array} \right] \sim r_3 = r_3 + 2r_2, \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & -\frac{50}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] &\sim r_1 = \frac{1}{13}r_1, r_2 = \frac{13}{25}r_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12}{13} & \frac{2}{13} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Det ses nu fra (2.14), at vi har to udtryk, et for x_1 og et for x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{12}{13}x_2 - \frac{2}{13}x_3, \\ x_2 &= 2x_3. \end{aligned}$$

Udtrykket for x_2 indsættes så i udtrykket for x_1 og det fås at:

$$x_1 = -\frac{12}{13} \cdot 2x_3 - \frac{2}{13}x_3 = -\frac{24}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_3 = -2x_3.$$

Dette medfører så at:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

$\mathbf{v}_3$ normaliseres og det fås at:

$$\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Altså er enhedsvektoren:

$$\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Disse tre enhedsvektorer $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ indgår alle i den højre singulære matrix V for A som søjlerne i V . V ser altså ud som følgende:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

For nu at finde de venstre singulære vektorer U betragtes

$$AV = U\Sigma,$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har altså nu at:

$$U\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

og da vi ønsker at finde U divideres hver søjle i $U\Sigma$ med de diagonale indgange fra Σ , således fås det at:

$$\begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Idet vi gerne vil have at U er en kvadratisk matrix, fjernes den sidste nulsøjle. Vi har nu,

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ og dermed er SVD'en af}$$

A er:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Hvis man ganger disse matrixer sammen igen fås:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

som netop er A .

3 | Signaler og modeller

Da vi nu har introduceret de fleste redskaber inden for lineær algebra, som skal bruges i projektet, vil vi introducere modeller samt signaler. Dette kapitel indeholder derfor forklaringer af signaler og modeller, som vil være grundlæggende for resultatbehandlings metoder og for forståelsen af forsøget. Kapitlet er baseret på [10, kapitel 1 og 9] og [11].

3.1 Modeller

Modeller er en beskrivelse af den opstillede og idealiserede del af virkeligheden, som vi ønsker at betragte. Vi skal bruge modellerne til at kunne forudsige, hvad der sker i fremtiden. Dette kræver, at vi har nok ønsket data til at kunne give et kvalitativt bud på fremtidens opførsel. For at kunne gøre dette, skal vi bruge en numerisk metode, som bruger dataet til at give en forudsigelse for, hvordan modellen opfører sig.

En model er en idealiseret del af virkeligheden, og det er derfor vigtigt at huske, at den aldrig vil kunne forudsige, hvad der reelt sker i fremtiden. Dette gør sig gældende, idet modellen er behæftet med usikkerhed og et begrænset gyldighedsområde. Det betyder, at alle virkelighedens detaljer ikke ville kunne blive forudset. Den data eller information, som en model er med til at opstille, kan beskrives med signaler, som er information, der kan ses i mange aspekter. Det kan være alt fra lydbølger til en beskrivelse af et objekt i bevægelse. Det gælder for signaler, at de indeholder indkodet information, der på et eller andet tidspunkt kan blive afkodet og så fortolket. Her betragtes de som matematiske funktioner.

3.2 Systemer

Et system er en sammensætning af komponenter der interagerer med hinanden, hvor hvert komponent overholder relevante fysiske love. Et system modtager input fra sine omgivelser, hvor komponenternes reaktion på disse input resulterer i et output. I et system findes der forskellige variable, som typisk er repræsenterede som funktioner afhængig af tid, men disse funktioner skal ikke forveksles med signaler, da de ikke altid kan måles.

3.3 Signaler

Signaler er som nævnt information, som udveksles mellem systemer, heraf er der to typer af signaler. Der eksisterer både kontinuerte- og diskrete signaler beskrevet henholdsvis med $y(t)$ og $y[n]$. Et tidskontinuert signal er afhængig af tid og kan repræsenteres til alle tidspunkter, hvor signalet kan måles. Et diskret signal er derimod en begrænset andel af det kontinuerte signal og kan derfor kun repræsenteres til bestemte tidspunkter.

Definition 3.1 (Tidskontinuert signal)

Et tidskontinuert signal er enhver stykvis kontinuert funktion:

$$y(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

som bringer information af en tidslig opførsel og af en målbar fysisk kvantitet.

[10, s. 15]

Her er notationen $\mathbb{R}_+$ alle ikke-negative reelle tal, mens $\mathbb{R}^n$ er et reelt vektorrum med dimension n .

Et diskret tidssignal er en sekvens af tal, som ikke er en funktion af en kontinuert uafhængig variabel, men derimod en diskret variabel.

Definition 3.2 (Tidsdiskret signal)

Et tidsdiskret signal er en sekvens af tallene y , hvor det n 'te nummer i sekvensen noteres med $y[n]$:

$$y = y[n].$$

[11, s. 12]

Når man sampler et kontinuert signal dannes der et begrænset antal elementer, som kan tælles og hvor signalet kan måles. Det bliver derfor konverteret om til et tidsdiskret signal. Dernæst har vi periodiske signaler, deres kendetegn er, at de gentager sig selv.

Definition 3.3 (Periodisk signal)

Et signal $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er periodisk med periode τ hvis $y(t + \tau) = y(t)$ for alle t .

[10, s. 100]

Definitionen fortæller at et periodisk signal $y(t)$ har en periode τ , hvor τ beskriver den mindste tid, det tager signalet at gentage sig selv. Hvis man har et $y(t)$ med signalværdier på et givet interval $[t, t + \tau]$, så kan man forlænge $y(t)$ ved at kopiere til intervallerne med $[nt, nt + \tau]$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Så kan man til et vilkårligt tidspunkt blandt signalværdierne genfinde τ til et givet interval.

Signalet beskrevet ved Dirac Delta funktionen er reelt set ikke en funktion, men derimod mere et begrænsning af funktioner også kaldet en matematisk fordeling. Denne fordeling har værdien nul for alle værdier af variablen undtagen ved 0, hvor Dirac Delta vil være uendelig.

Definition 3.4 (Dirac Delta)

Dirac Delta er en matematisk fordeling der afbilder $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, som er nul alle andre steder undtagen ved $t = 0$, hvor den er uendelig:

$$\delta = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}.$$

Derudover opfylder Dirac Delta identiteten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0),$$

for hvilken som helst $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bundet og kontinuert ved $t = 0$.

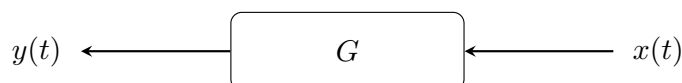
[10, s. 79]

Siden Dirac Delta ikke reelt er en funktion, vil vi undgå at referere til den som en og derimod kalde den enhedsimpulsen. Der kommer til at være brug af Kroneckers Delta under afsnittet om den Diskrete Fourier Transformation, hvor den bliver brugt til diskret foldning.

3.4 LTI-system

Da vi nu har introduceret en del matematiske redskaber, kan vi nu betragte LTI-systemer. Når der skrives LTI-system, betyder det et lineært tids-invariant system. Dette defineres nærmere i dette afsnit, der er baseret på kilderne [10, kapitel 3.1] og [?].

På figur 3.1 ses der en lineær operator G , der mapper et signal $x(t)$ over i et signal givet ved $y(t)$. Denne operator vil blive henvist til gennem afsnittet.



Figur 3.1: En lineær tidsinvariant operator G .

For at komme nærmere på den endelige definition af LTI-systemet, skal der først defineres, hvad der menes med linearitet. Linearitet gør at outputtet $y(t)$ er lineært afhængigt af inputtet $x(t)$. Dette gør, at inputtet $x_1(t)$ producerer outputtet $y_1(t)$, hvor det yderligere ses at inputtet af $(x_1(t) + x_2(t))$ producerer outputtet $(y_1(t) + y_2(t))$. Ydermere kan signalet forlænges med konstanterne a og b , der giver inputtet $(a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t))$, hvor outputtet udledes til $(a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t))$.

Definition 3.5 (Linearitet)

Lad G være en lineær operator over tiden t , med input af $x_1(t)$ og $x_2(t)$ og output for $y_1(t)$ og $y_2(t)$. Da gælder:

$$G[ax_1(t) + bx_2(t)] = aG[x_1(t)] + bG[x_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t),$$

hvor a og b er konstanter $\in \mathbb{R}$.

[10, kapitel 2.2.1]

Vi kan nu definere, hvad en tids-invariant operator er.

Definition 3.6 (Tids-invariants)

En operator $G : x(t) \mapsto y(t)$ er tids-invariant, hvis der for alle τ gælder, at:

$$y(t - \tau) = G(x(t - \tau)).$$

[10, s. 55]

Derfor kan et lineært tids-invariant system mappe fra et input til et output, hvor der kan forekomme tidsforskydning og skalering. Det lineære tids-invariante system er defineret på baggrund af brugen under eksempel 5.3.

Definition 3.7 (Impulsrespons)

Impulsresponsen $h(t)$ for en lineær tidsinvariant operator $G : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ er output responsen for en enhedsimpuls:

$$h(t) \equiv G(\delta(t)),$$

hvis vi ingen begyndelsesbetingelse har.

[10, s. 86]

Vi kan nu vise, hvordan responsen til et input for en LTI operator bestemmes.

Sætning 3.1

For en lineær tidsinvariant operator $G : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ med impulsresponsen $h(t) \in \mathcal{L}_2$, vil responsen til ethvert input $u(t)$ være givet ved ligningen:

$$y(t) = G(u(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

[10, s. 86]

Bevis

Lad $h(t)$ være enhedsimpulsresponsen for G , som i definition 3.7. Hvis enhedsimpulsen, som beskrevet i definition 3.4, er forskudt med en arbitrær værdi τ , vil:

$$h(t - \tau) = G(\delta(t - \tau)), \quad (3.1)$$

jævnfør definition 3.6. Hvis vi skalerer inputtet med en faktor, vil outputtet blive skaleret med samme faktor, grundet linearitet, se definition 3.5. Vi skalerer nu inputtet i (3.1), og derfor også outputtet, med en faktor $u(\tau)d\tau$:

$$h(t - \tau)u(\tau)d\tau = G(\delta(t - \tau)u(\tau)d\tau). \quad (3.2)$$

Vi husker, at integration er en lineær operator. Derfor hvis input funktionen til en lineær tidsinvariant operator integreres, vil output funktionen også blive integreret. Dette implementerer vi nu på (3.2):

$$\int_{t_1}^{t_2} h(t - \tau)u(\tau)d\tau = G\left(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - \tau)u(\tau)d\tau\right).$$

Vi antager, at $t_1 < t < t_2$, og jævnfør sifting property beskrevet i [10, s. 81], vil:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - \tau)u(\tau)d\tau = u(t). \quad (3.3)$$

Vi lader $t_1 \rightarrow -\infty$ og $t_2 \rightarrow \infty$, således at:

$$y(t) = G(u(t)), \quad (3.4)$$

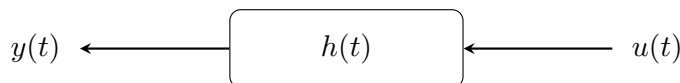
og indsætter nu (3.3) i (3.4):

$$y(t) = G\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)u(\tau)d\tau\right). \quad (3.5)$$

Vi kan nu genkende (3.2) i (3.5), således at:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (3.6)$$

som vi ville vise. ■

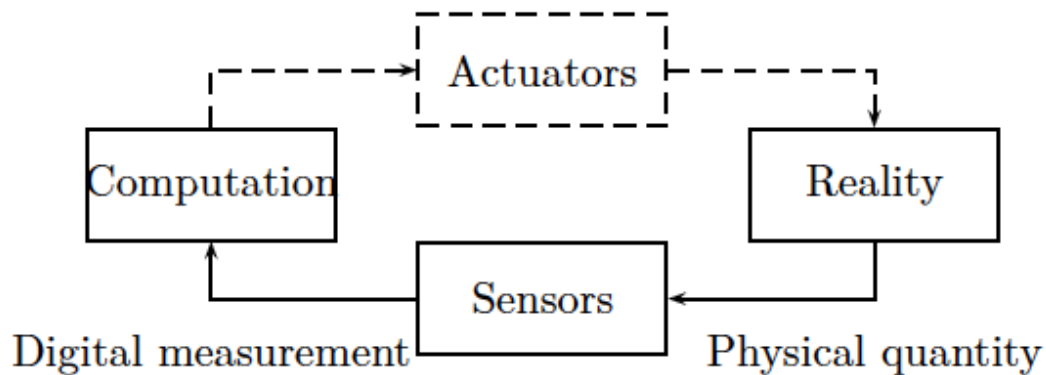


Figur 3.2: Et lineært tidsinvariant system, som mapper et inputsignal til et outputsignal ved at folde systemets impulsrespons $h(t)$ med inputtet $u(t)$. [10, s.87].

Integralet i (3.6) kan genkendes som foldningsintegralet for signalerne $u(t)$ og $h(t)$, illustreret på figur 3.2. Foldningsintegralet kan også skrives som $y(t) = h(t) * u(t)$, [10, s.87].

4 | Dataopsamling

I dette kapitel vi beskrive overgangen fra den analoge til den digitale verden, som illustreret på figur 4.1.



Figur 4.1: Illustration af sammenhængen mellem den analoge og digitale verden, [10, s. 174].

Analoge signaler er både kontinuere i tid og amplitude, og når vi sampler, oversætter vi et kontinuert signal til et diskret signal. Under konverteringen til den digitale verden, må vi gå på kompromis med præcisionen, herunder optræder aliasering og kvantisering, som vil blive beskrevet i dette kapitel.

4.1 Sensor

En sensor bruges til at oversætte fysiske signaler til elektriske signaler, som dernæst kan samples. I denne opgave benyttes en mikrofon til at opfange et talesignal.

4.1.1 Mikrofon

Dette afsnit tager udgangspunkt i [12] og [13].

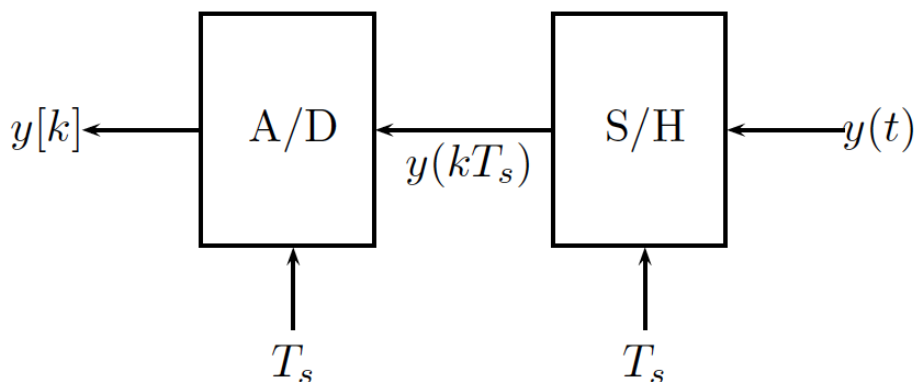
Mikrofonen der bruges under forsøget er en Røde NT-USB. Denne er en kondensator mikrofon, som virker på den måde, at der er en kondensator med to membraner, hvor der måles på trykforskellen.

Der tages ikke højde for forvrængning af lydsignalet, da tale oftest er omkring 60dB, hvor den anvendte mikrofon kan tage helt op til 110dB SPL. SPL står for sound pressure level, der er en måde at beskrive, hvor kraftig en lyd mikrofonen kan opfange uden af forvrænge lydsignalet.

4.2 Sampling

Dette afsnit er baseret på [10, kapitel 8] og [14, kapitel 1].

For at kunne filtrere et talesignal, skal signalet samples og kvantiseres, således at vi kan udføre beregninger på det. Sampling er konverteringen fra tidskontinuerte signaler til tidsdiskrete signaler som i definition 3.1 og 3.2.



Figur 4.2: Blokdiagram af den analoge til digitale konvertering, [10, s. 174].

Figur 4.2 illustrerer den analoge til digitale konvertering. Her ses, at det kontinuerte signal y først måles ved sample hold (S/H), og dernæst diskretiseres signalet ved den analoge til digitale konvertering (A/D), som resulterer i det tidsdiskrete digitale signal $y[k]$. Vi har det kontinuerte talesignal, som både er kontinuert i amplitude og tid. Det vil vi have ind i et elektronisk kredsløb.

Først går signalet igennem S/H, som sikrer at vi tager den signalværdi, som optræder præcis ved tiden T_s og fikserer den værdi, således at den ikke ændrer sig. Vi fastholder værdien $y(kT_s)$, hvor k er en tællevariabel, og T_s er den tidskonstante samplingstid. Derefter bliver signalet konverteret fra analog til digital, kaldet en A/D konvertering, som foregår til samme tidspunkt T_s . Den diskrete repræsentation af tal, $y[k]$, er den del computeren kan arbejde videre med.

En sampler består af en serie af enhedsimpulser, jævnfør definition 3.4, som vi sætter efter hinanden med konstante intervaller, der svarer til samplingstiden T_s . Denne serie af enhedsimpulser kan vi udtrykke som:

$$\Delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Hvor $k \in \mathbb{Z}$ er en tællevariabel, $T_s \in \mathbb{R}_+$ er en konstant og $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ er samplingsfrekvensen i radianer per sekund. Hvis vi ganger vores inputsignal, $y(t)$ med Δ_{T_s} fås:

$$y(t)\Delta_{T_s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_s)\delta(t - kT_s),$$

jævnfør sampling property, som ses i [10, s. 82].

Vi finder outputtet for en proces ved at folde med impulsresponsen, 3.7, for det system, som vi opererer på. Dette er vist i bevis 3.1 og på figur 3.2. I vores tilfælde er impulsresponsen $\Delta_{T_s}(t)$ givet ved (4.1) og inputtet er vores talesignal $y(t)$, vi får da:

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \Delta_{T_s}(t) * y(t), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\Delta_{T_s}(t - \tau)d\tau, \\ &= \begin{cases} y(kT_s) & t = kT_s, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}\end{aligned}$$

Ved hjælp af sifting property får vi signalet selv i punktet $t = kT_s$ og nul alle andre steder.

Til slut konverteres $y(kT_s)$ til diskrete værdier $y[k] \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, som er en sekvens af talværdier, der kan indekseres med den diskrete tællerværdi k . Denne konvertering sker ved hjælp af kvantisering, som beskrives i afsnit 4.2.2.

4.2.1 Samplingsfrekvens og aliasering

Da sampling grundlæggende er introduceret, vil vi fokusere på nogle af de vigtige fænomener indenfor sampling. Dette afsnit er baseret på kilden [10, kapitel 8.3]. Ved sampling kan der forekomme signaler der oscillerer hurtigere end Nyquist-Shannon-frekvensen. Dette er et fænomen kaldet aliasering. For at være sikker på, at et signal optræder uden aliasering, vil der i dette kapitel gennemgået en metode for Nyquist-raten, der er et fænomen for minimumssamlingsraten.

Sætning 4.1 (Nyquist-Shannons fænomen)

Lad $y(t)$ være et tidskontinuert båndbegrænset signal med en kontinuert Fourier Transformation $Y(\omega)$. Antag at der eksisterer en frekvens $\omega_N > 0$, så:

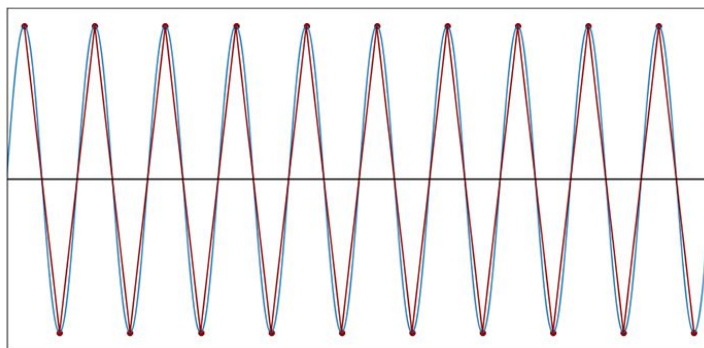
$$Y(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_N.$$

Så $y(t)$ er unik til dets samples $y[k]$, $k \in \mathbb{Z}$, hvis samplingsfrekvens opfylder:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_N. \quad (4.2)$$

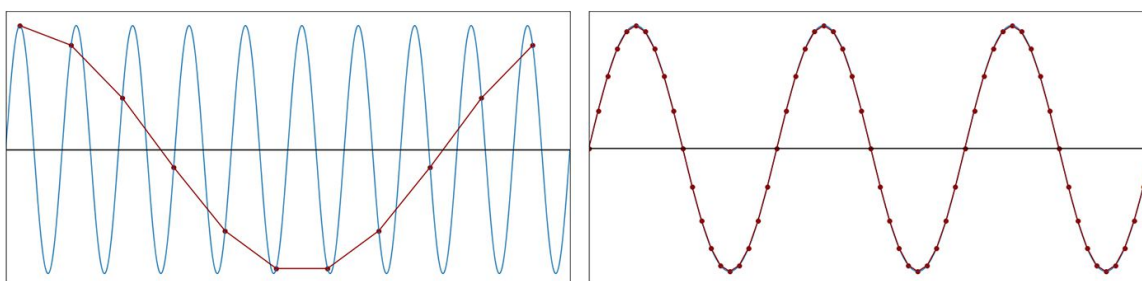
Ved (4.2), ses ω_s til at være frekvensen for lydspektret, også kaldet Nyquist-Shannon-frekvensen, hvor $2\omega_N$ er Nyquist-raten. [10, s. 182].

Når et signal siges at være båndbegrænset, betyder det, at man betragter det på et begrænset frekvensinterval. Dette interval skal opfylde, at $0 \leq \omega_{min} < \omega_{max} < \infty$, for den kontinuerte Fourier Transformationen $Y(\omega) = 0$. For at se nærmere på det gennem lyd, hvor for eksempel et normalt talesignal ligger op til 4kHz. Dette betyder nu, at Nyquist-Shannon-frekvensen kan anskues som 4kHz, hvilket udledes fra, at Nyquist-raten er 8kHz = $2 \cdot 4\text{kHz}$. Tilfældet hvor Nyquist-Shannon-frekvensen lige overholder Nyquist-raten ses af figur 4.3. Hvilket i praksis ofte anskues til at være lavt sat, da man som regel bruger samplingsrater op til 5 – 20 gange så høje som Nyquist-Shannon-frekvensen [10, kapitel 8.3.1].



Figur 4.3: Plot af samplingsraten 2Hz. Figuren er fra kilde [15].

Ved forsøget lægges der en fast samplingsrate på 16kHz. Dette sikrer os for at opleve aliasering, som er når et frekvenssignal efter sampling opnår en lavere frekvens end det optagede signal. Dette ses på figur 4.4a, hvor det oprindelige signal (blå) har en betydelig højere frekvens end det samplede signal (rød). Den minimale samplingsrate kan anskues af figur 4.3, der lige netop overholder Nyquist-raten.



(a) Plot af samplingsraten 1.1Hz.

(b) Plot af samplingsraten 20Hz.

Figur 4.4: Plot af henholdsvis samplingsraten 1.1Hz og 20Hz. Figuren er fra kilde [15].

Ud fra dette kan det konstateres, at det er vigtigt at finde den mest optimale samplingsrate. Det ses nemlig tydeligt på figur 4.4b, at punktmængden for samplingsraten fint følger kurvens udvikling, hvor det så modsat ses på figur 4.4a, at der netop *ikke* gives et præcist billede af kurvens udvikling. Figur 4.3 og 4.4 er også at finde i appendiks A.

4.2.2 Kvantisering

Da en computer arbejder med en endelig mængde af bits, er det ikke nok at tiden er diskret. Vi kræver også, at amplituden er diskret. Dette sker ved en opdeling af vores udfaldsrum i diskrete intervaller, og denne konvertering kaldes kvantisering.

Ved kvantisering konverteres amplituderne til n -bit binære cifre. For en kvantisering med n -bits, opdeles amplitudernes udfaldsrum i 2^n diskrete intervaller, hvor hver sample er mappet til nærmeste interval og dernæst givet et binært tal tilhørende det givne interval.

Det kvantiserede signal, $y[k]$, kan kun antage værdier i det givne udfaldsrum, og derfor vil signaler, som er udenfor sampleenhedens dynamikområde, blive registreret som enten minimum eller maksimum. Kvantisering er irreversibel, da vi har tab af information, og fejlen udtrykkes som:

$$\varepsilon[k] = y(kT_s) - y[k]. \quad (4.3)$$

Flere bits giver højere opløsning og dermed mindre kvantiseringsfejl. Kvantisering kan opdeles i niveauer, L , hvor $L = 2^n$ beskriver det niveau, vi kvantiserer med, hvor n er antallet af bits.

5 | Fourieranalyse

5.1 Den Diskrete Fourier Transformation (DFT)

Vi ønsker i dette afsnit at introducere nogle værktøjer, som kan bruges til at beskrive lydssignaler. Eftersom de fleste signaler ikke nødvendigvis kan beskrives som glatte funktioner, må vi i stedet betragte en endelig række af samplede datapunkter, som vores signal. Dertil er den Diskrete Fourier Transformation brugbar, da den transformerer et diskret signal i tidsdomænet over i frekvensdomænet. Metoden er derfor effektiv til at bestemme frekvensindholdet i et samplet signal, hvilket vil blive anvendt senere i projektet. Dette afsnit er baseret på [16, kapitel 1].

I projektet vil vi arbejde med forskellige signaler, som vi kan opfatte som en sekvens af datapunkter. Disse sekvenser vil vi betragte som vektorer. Altså kan vi for enhver sekvens af data l_N , beskrive den som en vektor således:

$$l_N = \begin{bmatrix} l(0) \\ l(1) \\ \vdots \\ l(N-1) \end{bmatrix}.$$

Derudover kan vi betragte $\mathbb{C}^N$ som mængden hvori alle sekvenser ligger. Vi kan nu definere den Diskrete Fourier Transformation.

Definition 5.1 (Den Diskrete Fourier Transformation)

Lad $z \in \mathbb{C}^N$ og lad $\hat{z} \in \mathbb{C}^N$ være defineret ved:

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{z}(0) \\ \hat{z}(1) \\ \vdots \\ \hat{z}(N-1) \end{bmatrix},$$

hvor

$$\hat{z}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} z[n] \cdot e^{-\frac{2\pi i m n}{N}}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Her betegner vi $\hat{z}$ som den Diskrete Fourier Transformation af z . [16, s. 5].

Det er vigtigt at forstå, hvordan den Diskrete Fourier Transformation beskriver et signal. Eftersom det transformerede signal består af komplekse værdier, kan vi bestemme amplituden af frekvensspektret for signalet ved at tage modulus af transformationen $|\hat{z}[m]|$. Dette kan anvendes til at bestemme energien i et signal.

Lad os betragte en generel Diskret Fourier Transformation $\hat{z} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$. Lad $z \in \mathbb{C}^N$, så har vi for $m = 0, 1, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned}\hat{z}[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} z[n] \cdot e^{\frac{-2\pi i m n}{N}}, \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z[n] \cdot \left(e^{\frac{-2\pi i}{N}}\right)^{mn}.\end{aligned}$$

Vi lader $\omega_N = e^{\frac{-2\pi i}{N}}$ og får dermed:

$$\hat{z}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} z[n] \cdot \omega_N^{mn}.$$

Vi definerer nu en ny matrix $\Omega_N = (\omega_N^{mn})_{0 \leq m, n \leq N-1}$. Herfra kan vi så skrive den Diskrete Fourier Transformation som:

$$\hat{z} = \Omega_N \cdot z, \quad z \in \mathbb{C}^N. \quad (5.1)$$

Vi betegner Ω_N som fouriermatricen.

Ergo er den Diskrete Fourier Transformation en linear transformation jævnfør definition 2.13, som opererer på en sekvens, hvorfor vi kan opstille den på matrixform som i (5.1).

Eksempel 5.1

Vi ønsker at bestemme den Diskrete Fourier Transformation af signalet $z \in \mathbb{C}^4$ givet ved:

$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Vi husker, at fouriermatricen Ω_N er givet ved:

$$\Omega_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.$$

Eftersom $N = 4$ i vores eksempel har vi:

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \\ 1 & \omega_4^2 & \omega_4^4 & \omega_4^6 \\ 1 & \omega_4^3 & \omega_4^6 & \omega_4^9 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Vi bestemmer nu:

$$\omega_4 = e^{\frac{-2\pi i}{4}} = e^{\frac{-\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -i.$$

Derfor må (5.2) være givet ved:

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Vi kan så bestemme den Diskrete Fourier Transformation af signalet ud fra (5.1):

$$\begin{aligned} \hat{z} = \Omega_4 z &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + i \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-i) + 1 \cdot (-1) + i \cdot i \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + i \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot i + 1 \cdot (-1) + i \cdot -i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + i \\ -1 \\ 2 - i \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

hvilket er vores transformation. I virkeligheden og fremadrettet i projektet, vil der ofte blive behandlet signaler, der er markant større end i dette eksempel. Dertil vil computerberegninger anvendes, da der ellers skal udføres utrolig mange beregninger. Lyd samples eksempelvis helt op til 16kHz, hvilket trods alt er en del mere end 4 punkter som i dette eksempel. Derudover er der i eksemplet brugt komplekse tal som input, dette vil ikke blive anvendt i forsøgene senere i projektet, da vores input er reelle.

Vi har nu mulighed for at bestemme den Diskrete Fourier Transformation, men vi ønsker også at kunne transformere tilbage igen.

For at kunne betragte den inverse DFT, kræver det, at vi kender til den komplekst konjugerede af et komplekst tal.

Definition 5.2 (Kompleks konjugerede)

Lad $a, b \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$. For et komplekst tal $z = a + bi$ defineres den komplekst konjugerede som:

$$\bar{z} = a - bi.$$

[17, Appendix 1: Complex Numbers.]

Definitionen fortæller, at når et komplekst tal konjugeres, ændres fortegnet for den imaginære del af det komplekse tal.

Definition 5.3 (Den Inverse Diskrete Fourier Transformation)

Lad $w \in \mathbb{C}^N$ og lad $\hat{w} \in \mathbb{C}^N$ være defineret ved:

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} \hat{w}(0) \\ \hat{w}(1) \\ \vdots \\ \hat{w}(N-1) \end{bmatrix},$$

hvor

$$\hat{w}[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w[m] e^{\frac{2\pi i m n}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Her betegner vi $\hat{w}$ som den Inverse Diskrete Fourier Transformation af w .
[16, s. 9]

Fremadrettet vil den Diskrete Fourier Transformation blive noteret med $(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N})$ og ligeledes noteres den inverse transformation med $(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1})$.

Eftersom den Diskrete Fourier Transformation kan opskrives som en matrixtransformation, må den også have en invers operator. Vi tager udgangspunkt i transformationen $\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ og lader $w \in \mathbb{C}^N$ og vi får fra definition 5.3, at for $m = 0, 1, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1} w)[m] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{\frac{2\pi i m n}{N}}, \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \left(e^{\frac{2\pi i}{N}} \right)^{mn}. \end{aligned}$$

Vi omskriver nu med den komplekst konjugerede da, $\left(e^{\frac{2\pi i}{N}} \right)^{mn} = \overline{\left(e^{\frac{-2\pi i}{N}} \right)^{mn}}$, og vi lader $\omega_N = e^{\frac{-2\pi i}{N}}$. Dette giver os:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1} w)[m] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \overline{\left(e^{\frac{-2\pi i}{N}} \right)^{mn}}, \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \overline{\omega_N^{mn}}. \end{aligned}$$

Hvis fouriermatricen $\Omega_N = (\omega_N^{mn})_{0 \leq m, n \leq N-1}$, må $\overline{\Omega_N} = \overline{(\omega_N^{mn})_{0 \leq m, n \leq N-1}}$, hvorfor vi kan skrive:

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1} w)[m] = \frac{1}{N} (\overline{\Omega_N} w)[n].$$

Her skal $\overline{\Omega_N}$ forstås som at vi tager den originale matrix Ω_N og tager den komplekst konjugerede af hver indgang. Vi har altså generelt, at:

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1} w) = \frac{1}{N} \overline{\Omega_N} w, \quad w \in \mathbb{C}^N. \quad (5.4)$$

Vi ønsker nu at retfærdiggøre, at vi kalder transformationen i (5.4) for den inverse transformation.

Sætning 5.1

Transformationen $(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1}) : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ givet i (5.4) er den inverse af $(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}) : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ givet i (5.1).
[16, s. 10]

Bevis

Fra definition 5.3 har vi, at for en vilkårlig sekvens $w \in \mathbb{C}^N$:

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1}w) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}w) e^{\frac{2\pi i m n}{N}} = w, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.5)$$

Vi betragter de to givne transformationer som matricer. Jævnfør (5.5) må der gælde, at:

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1})(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}) = I_N. \quad (5.6)$$

Hvor N angiver størrelsen af identitetsmatricen I_N defineret i definition 2.8. Vi skal nu vise, at determinanten af den Diskrete Fourier Transformation ikke er 0. Dette må gælde, da vi ifølge punkt 11 og (5.6) har, at:

$$\det((\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1})(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N})) = \det(I_N) = 1. \quad (5.7)$$

Udfra punkt 6 og (5.7) har vi, at:

$$\det((\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1})) \det((\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N})) = 1.$$

Heraf følger, at $\det((\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N})) \neq 0$, hvorfor den Diskrete Fourier Transformation ifølge punkt 12 på matrixform er *inverterbar* som i definition 2.9, og der eksisterer således en unik matrix A_N af størrelse N , som svarer til den inverse af $(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N})$. Eftersom matricen A_N er den inverse af $(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N})$ må der ifølge dette og (5.6) gælde, at:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1})(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}) A_N &= I_N A_N \quad \Leftrightarrow \\ (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1}) &= A_N. \end{aligned}$$

Ergo er den Diskrete Fourier Transformation på matrixform inverterbar, og transformationen $(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}^{-1}) : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ givet i (5.4) er netop den inverse af (5.1).
[16, s. 10] ■

Eksempel 5.2

Vi ønsker at anvende den Inverse Diskrete Fourier Transformation givet i (5.4) på det transformerede signal i eksempel 5.1. Vi har derfor, at transformationen af signalet $z \in \mathbb{C}^4$:

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^4} z) = \begin{bmatrix} 2+i \\ -1 \\ 2-i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har da, ifølge sætning 5.1, at:

$$z = \frac{1}{N} \overline{\Omega_N} (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^4} z).$$

Vi husker fra eksempel 5.1, (5.3) at $N = 4$, og dermed fås det, at:

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

Vi bestemmer nu $\overline{\Omega_4}$ ved at tage den komplekst konjugerede af hver indgang:

$$\overline{\Omega_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu bestemme den inverse transformation:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{N} \overline{\Omega_N} (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^4} z) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+i \\ -1 \\ 2-i \\ 1 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \cdot (2+i) - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (2-i) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (2+i) - i \cdot 1 - 1 \cdot (2-i) - i \cdot 1 \\ 1 \cdot (2+i) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (2-i) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (2+i) + i \cdot 1 - 1 \cdot (2-i) + i \cdot 1 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 4i \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har altså brugt den Inverse Fourier Transformation til at transformere det transformerede signal tilbage til det originale signal.

5.2 Foldning

En meget brugbar operator indenfor signalanalysen er foldning, som vist på figur 3.2. Det, som netop er interessant ved foldning, er, at foldning i tidsdomænet svarer til multiplikation i det frekvensdomæne, som den Diskrete Fourier Transform skaber. Dette afsnit er baseret på [16, kapitel 4].

Definition 5.4 (Diskret foldning)

Lad signalerne $z, w \in \mathbb{C}^N$. Vi definerer da signalet $(z * w) \in \mathbb{C}^N$ ved:

$$(z * w)[m] = \sum_{n=0}^{N-1} z[m-n]w[n], \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Vi kalder $(z * w)$ foldningen af z og w .
[16, s. 27]

Vi ønsker nu at vise, at diskret foldning er en interessant operator, når den fouriertransformeres.

Sætning 5.2

Lad $z, w \in \mathbb{C}^N$. Da er:

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}(z * w))[m] = (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}z)[m] (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}w)[m], \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Foldning i tidsdomænet er altså multiplikation i frekvensdomænet.
[16, s. 30]

Bevis

Vi indsætter vores signal $(z * w)$ i formen for den Diskrete Fourier Transformation fra definition 5.1 og substituerer derefter formen for diskret foldning ind:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}(z * w))[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} (z * w)[n] \cdot e^{\frac{-2\pi i m n}{N}}, \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} z[n-k]w[k] \right) e^{\frac{-2\pi i m(n-k)}{N}} e^{\frac{-2\pi i m k}{N}}. \end{aligned}$$

Vi omskriver udtrykket yderligere:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}(z * w))[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} z[n-k]w[k] \right) e^{\frac{-2\pi i m(n-k)}{N}} e^{\frac{-2\pi i m k}{N}}, \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} z[n-k]e^{\frac{-2\pi i m(n-k)}{N}} \right) w[k]e^{\frac{-2\pi i m k}{N}}, \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} w[k]e^{\frac{-2\pi i m k}{N}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} z[n-k]e^{\frac{-2\pi i m(n-k)}{N}} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Vi indser, at vi fra definition 5.1 har, at:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w[k] e^{\frac{-2\pi i m k}{N}} = (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N} w)[m]. \quad (5.9)$$

Vi indsætter udtrykket fra (5.9) i (5.8):

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}(z * w))[m] = (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N} w)[m] \left(\sum_{n=0}^{N-1} z[n-k] e^{\frac{-2\pi i m(n-k)}{N}} \right). \quad (5.10)$$

Vi kan nu se på summen i (5.10), og vi laver et variabelskift. Lad $l = n - k$, da for den nedre grænse af summen, har vi, at $l = -k$. Heraf følger, at den øvre grænse af summen er $N - 1 - k$. Vi har så:

$$\sum_{n=0}^{N-1} z[n-k] e^{\frac{-2\pi i m(n-k)}{N}} = \sum_{l=-k}^{N-1-k} z[l] e^{\frac{-2\pi i m l}{N}}. \quad (5.11)$$

Vi indser, at funktionen $z[l] e^{\frac{-2\pi i m l}{N}}$ er periodisk med perioden N i forhold til variabelen l på $\mathbb{Z}$. Fra Proposition 1.19 i [16, s. 13] har vi, at om en vilkårlig funktion z , der er periodisk på $\mathbb{Z}$ med perioden N gælder, at for hvert $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=k}^{N-1+k} z[n] = \sum_{n=0}^{N-1} z[n]. \quad (5.12)$$

Vi anvender (5.12) på (5.11) og får:

$$\sum_{l=-k}^{N-1-k} z[l] e^{\frac{-2\pi i m l}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} z[l] e^{\frac{-2\pi i m l}{N}}. \quad (5.13)$$

Udtrykket til højre i (5.13) er ifølge Definition 5.1 den Diskrete Fourier Transformation af z . Samler vi ligningerne (5.11) og (5.13) på summen i (5.10) får vi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} z[n-k] e^{\frac{-2\pi i m(n-k)}{N}} &= \sum_{l=-k}^{N-1-k} z[l] e^{\frac{-2\pi i m l}{N}}, \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} z[l] e^{\frac{-2\pi i m l}{N}}, \\ &= (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N} z)[m]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Indsætter vi udtrykket fra (5.14) i (5.10) får vi, at:

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N}(z * w))[m] = (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N} z)[m] (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N} w)[m].$$

[16, s. 30-31] ■

Diskret foldning kan dermed anvendes til at beskrive multiplikation i frekvensdomænet. Derudover kan diskret foldning også anvendes til at beskrive outputtet af et lineært tidsinvariant system.

Eksempel 5.3

Vi ønsker at beskrive et lineært tidsinvariant systems output ved hjælp af foldning. Vi lader da først:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j. \end{cases}$$

hvor δ_{ij} er Kroneckers Delta. Vi vil anvende Kroneckers Delta i det specialtilfælde, hvor i eller j er 0. Vi betegner da:

$$\delta[n] = \delta_{n0} = \delta_{0n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Ergo har vi, at:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n = 0, \\ 0 & \text{hvis } n \neq 0. \end{cases}$$

Denne har egenskaben, at ved diskret foldning får vi blot det originale signal i det givne punkt, det vil sige med definition 5.4 fås:

$$(z * \delta)[m] = \sum_{n=0}^{N-1} z[m-n]\delta[n] = z[m].$$

Lad $u[m]$ være defineret ved:

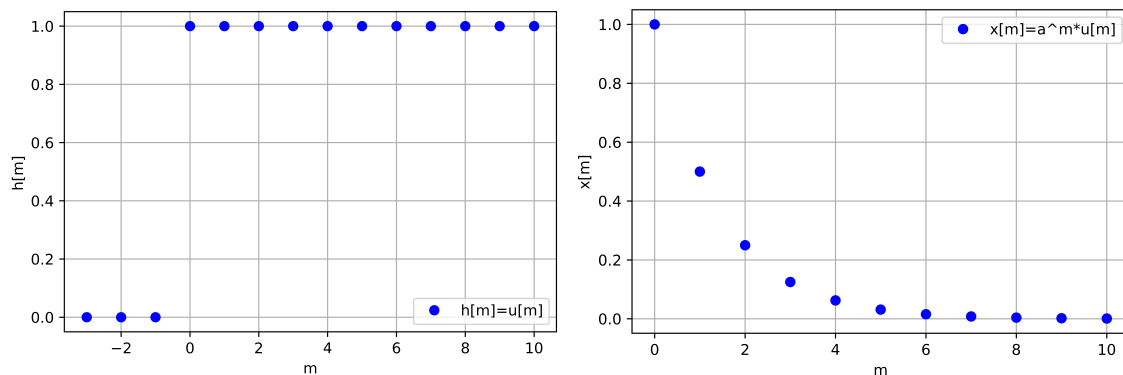
$$u[m] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[m-n]. \quad (5.15)$$

Da er $u[m] = 1$ for $n \geq 0$ og $u[m] = 0$ for $n < 0$.

Lad $x[m]$ være et input og lad $h[m]$ være impulsresponsen til et LTI system være givet ved:

$$\begin{aligned} x[m] &= a^m u[m], \\ h[m] &= u[m], \end{aligned}$$

for $0 < a < 1$. Vi lader så $a = 0.5$. Vi kan da plote inputtet $x[m]$ og impulsresponsen $h[m]$:



(a) Plot af $h[m]$.

(b) Plot af $x[m]$.

Figur 5.1: Plot af henholdsvis $h[m]$ og $x[m]$.

Vi ønsker at folde de to signaler. Vi anvender derfor definition 5.4 og vi husker, at $h[m] = u[m]$, som er defineret i (5.15). Det betyder, at for $m < 0$ er $x[n]h[m-n] = 0$, da alle værdierne blot er 0. Vi husker, at $x[m] = a^m u[m]$. Det betyder, at når vi summerer fra $n = 0$ til m , er $x[n]h[m-n] = a^n$ for $0 \leq n \leq m$.

Vi kan altså skrive outputtet $y[m]$ som:

$$y[m] = (x * h)[m] = \sum_{n=0}^m a^n, \quad 0 \leq m \leq 10. \quad (5.16)$$

Vi vil nu omskrive udtrykket i (5.16). Vi har, at:

$$S_m = 1 + a + a^2 + \dots + a^m = \sum_{n=0}^m a^n.$$

Vi bestemmer nu $a \cdot S_m$:

$$a \cdot S_m = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{m+1}.$$

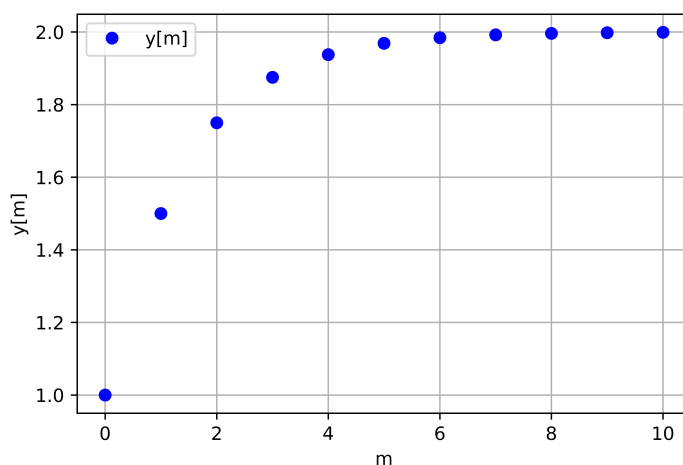
Vi bestemmer nu $S_m - a \cdot S_m$ og isolerer S_m :

$$\begin{aligned} S_m - a \cdot S_m &= 1 - a^{m+1}, & \Leftrightarrow \\ S_m(1 - a) &= 1 - a^{m+1}, & \Leftrightarrow \\ S_m &= \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Vi indsætter nu (5.17) i (5.16), og vi får for alle m , at:

$$y[m] = (x * h)[m] = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a} u[m].$$

Vi har nu et udtryk for outputtet, som vi kan plotte:



Figur 5.2: Plot af outputtet $y[m]$.

[16, s. 29-30]

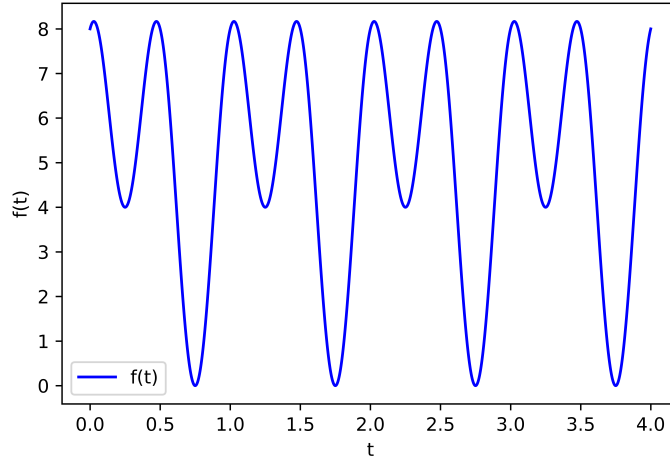
Lad os se et eksempel, hvor vi anvender den Diskrete Fourier Transformation på et konkret signal.

Eksempel 5.4

Vi antager, at vi får givet et kontinuert lydssignal på formen:

$$f(t) = 5 + 2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(4\pi t). \quad (5.18)$$

Grafen for funktionen ser således ud:



Figur 5.3: Plot af funktionen $f(t)$.

I (5.18), er det første led den strøm der tilføjes lydssignalet. Det andet led repræsenterer 1Hz og det tredje og sidste led er 2Hz. Vi ønsker at sample vores funktion med samplingsfrekvensen $f_s = 4\text{Hz}$ fra $t = 0$ til $t = \frac{3}{4}$. Vores diskrete værdier er dermed givet ved formlen:

$$f[k] = 5 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(\pi k), \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (5.19)$$

hvor substitutionen $t = \frac{k}{4}$ er lavet. Vi har så:

$$f[0] = 5 + 2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(0) = 5 + 3 = 8,$$

$$f[1] = 5 + 2 \cos(0) + 3 \cos(\pi) = 5 + 2 - 3 = 4,$$

$$f[2] = 5 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(2\pi) = 5 + 0 + 3 = 8,$$

$$f[3] = 5 + 2 \cos(\pi) + 3 \cos(3\pi) = 5 - 2 - 3 = 0.$$

Eftersom vi har, at $N = 4$, kan vi bruge samme metode som i eksempel 5.1 til at beregne den Diskrete Fourier Transformation. Vi har fra (5.1), at:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}^N} = \Omega_N z.$$

Da vi har samplet med en frekvens på 4, er $N = 4$. Derfor har vi fra (5.3), at:

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

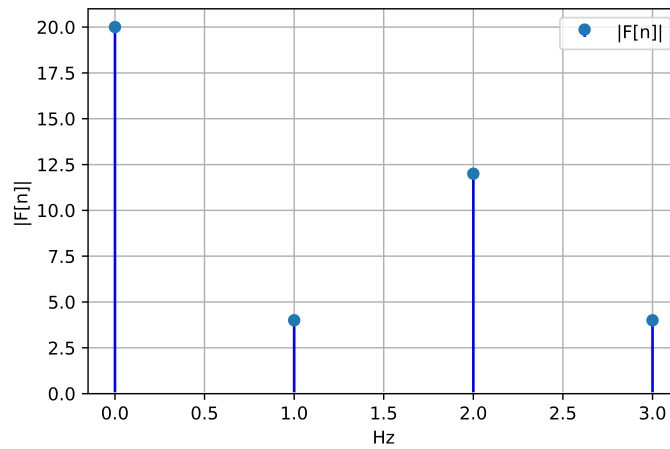
Vi kan nu beregne den Diskrete Fourier Transformation:

$$\begin{aligned}
 F[n] = \begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{bmatrix} &= (\mathcal{F}_{\mathbb{C}^4}) = \Omega_4 z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 - 4 \cdot i - 8 \cdot 1 + 0 \cdot i \\ 8 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + 4 \cdot i - 8 \cdot 1 - 0 \cdot i \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} 20 \\ -4i \\ 12 \\ 4i \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Vi kan nu plotte vores amplituden af DFT spektret ved at plotte:

$$|(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^4})| = \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi har så:



Figur 5.4: Plot af amplituden af de transformerede værdier for $f[k]$.

Betragter vi ovenstående, kan vi anvende den Inverse Diskrete Fourier Transformation givet i definition 5.3 på hvert udregnet punkt den Diskrete Fourier Transformation. Ser vi på $F[0] = 20$ kan vi udlede, at vores funktion, som vi har samplet, indeholder en konstant værdi $f_0[k] = \frac{1}{4}F[0] = 5$, hvilket passer med det originale signal.

Derudover har vi også, at $F[1] = -4i = \overline{F[3]}$, hvilket implicerer, at der er en faseforskydning på:

$$\arg(F[1]) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan^{-1}(-x) \right) = -\frac{\pi}{2},$$

hvilket passer med faseforskydningen i 2. led i det originale signal i (5.19). Her ser vi også en amplitude på $\frac{2}{4}|F[1]| = 2$. Sidst kan vi se, at vores signal har et komponent $f_2[k]$, som forventet, på formen:

$$f_2[k] = \frac{1}{4}F[2]e^{i\pi k} = 3(\cos(\pi k)) + i\sin(\pi k) = 3\cos(\pi k).$$

Vi kan derfor konkludere, at den Diskrete Fourier Transformation beskriver et lydsignal på flere brugbare måder.

5.3 DFT under forsøget

Omend det er den Diskrete Fourier Transformation, som er gennemgået i dette afsnit, er det en anden variation af transformationen, som vil blive anvendt i forsøget. Helt konkret vil der i forsøget blive anvendt Short-time Fourier Transformationen. Årsagen dertil er, at den Diskrete Fourier Transformation ikke giver os tidslig information angående det samplede signal. Mere specifikt er STFT'en en metode, som meget simpelt, blot laver en DFT af signalet opdelt i lige store blokke. Dette giver en grov model af frekvensindholdet af signalet i forhold til tiden. For at få en bedre opløsning laves der så overlapninger i blokkene.

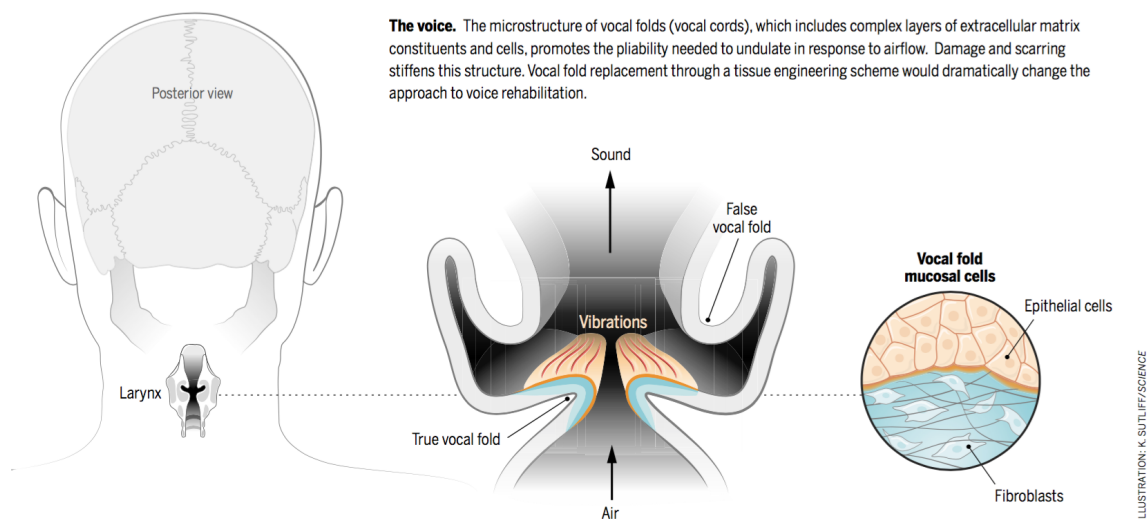
Grundet anvendelsen af STFT'en kan vi plotte et spektrogram af vores samplede signaler, eftersom vi har ændringen i frekvensindholdet i forhold til tiden. Ofte når spektrogrammer plottes, er det dog amplituden kvadreret, som plottes. På figur 5.4 er det for eksempel ikke den kvadrerede amplitude, som er plottet, hvorfor det ikke er et spektrogram, som dem, der vil anvendes senere i projektet. Ydermere kan vi anvende spektrogrammet til at se, hvilke frekvenser der har meget energi på bestemte tidspunkter. Betragter vi eksempelvis figur 6.4a, har vi tiden på 1. akse og frekvensen repræsenteret på 2. akse. Farven angiver energien, hvor vi ser, at den gule farve eksempelvis angiver, at denne frekvens har mere energi end en mere blå farve. Farvebetydningen angives også på højre side af spektrogrammet.

6 | Talesignal

Da vi på nuværende tidspunkt både kan beskrive modeller og signaler, kan vi behandle selve talesignalet og støj. Dette kapitel tager primært udgangspunkt i [18] og [14, s. 11-12]. For at kunne fjerne baggrundsstøj fra et talesignal, skal der forklares, hvordan tale er produceret. I denne opgave fokuseres der på vokallyde, og derfor vil beskrivelsen af et talesignal tage udgangspunkt i dette.

6.1 Talesignal

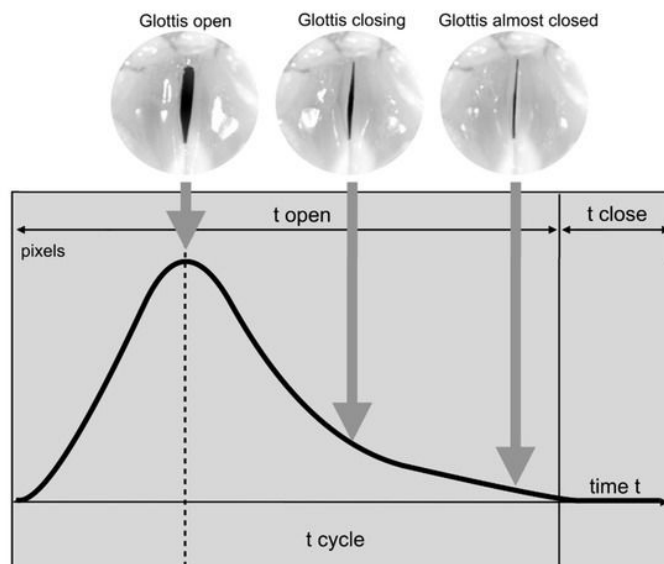
Stemmen er lyd, der frembringes via luftvibrationer i halsen. Disse vibrationer skabes af stemmelæberne, som sættes i svingninger af luftstrømmen fra lungerne. Efterfølgende bliver luftvibrationerne til lyd, når de resonerer igennem svælget, næsen og munden. En illustration af dette kan ses på figur 6.1.



Figur 6.1: Skitse af struben [19].

Længden af stemmelæberne bestemmer, hvor dyb eller lys en stemme er. Ved dybere toner, vil stemmelæberne slappe mere af og lave langsomme svingninger, og ved lysere toner vil stemmelæberne spændes op og lave hurtigere svingninger. Dette gør, at længere stemmelæber giver en dybere tone, da de svinger langsommere. Kortere stemmelæber giver en lysere tone, da de svinger hurtigere, [18].

Når stemmelæberne bliver sat i svingninger, sker det ved, at et lufttryk bliver opbygget fra lungerne under de lukkede stemmelæber. Først når dette tryk er stort nok, åbnes stemmelæberne, og en del luft bliver udgivet. Dernæst lukkes stemmelæberne igen, og processen gentager sig. Hvis vi plotter lufttrykket som en funktion af tiden t , får vi et periodisk signal jævnfør definition 3.3. Dette er illustreret på figur 6.2, og kendes som pitch perioden.

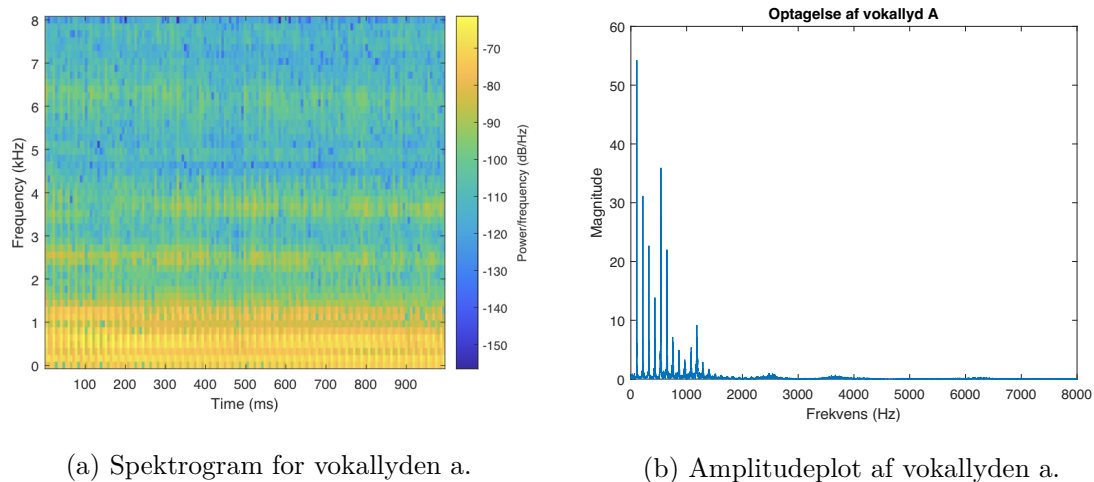


Figur 6.2: Model, som viser sammenhængen mellem stemmelæbernes bevægelse og lufttrykket. Figuren er fra [20, kapitel 2].



Figur 6.3: Lineær model af produktionen af et talesignal.

På figur 6.3 ses det, at lungerne producerer et konstant signal, $l(t)$. Dette sker når vi laver vokallyde, og $l(t)$ vil være inputtet til stemmelæberne. Dernæst vil stemmelæberne producere et periodisk signal, $p_T(x)$, og dette fungerer som inputtet til svælget, næsen og munden. Til sidst får vi outputtet, $y(t)$, som er vores talesignal. Dette kan vi opfange med en mikrofon. Almindelig tale ligger i frekvensområdet mellem 500Hz til 3000Hz, [21]. På figur 6.4b ses et amplitudeplot for vokallyden a, og her ses den største signalstyrke ved 0Hz til 1200Hz. Hvoraf figur 6.4 kan findes i appendix, som større figurer.



(a) Spektrogram for vokallyden a.

(b) Amplitudeplot af vokallyden a.

Figur 6.4: Visualisering af vokallyden a.

På figur 6.4a ses det desuden også at der er noget energi spredt udover forskellige frekvenser. Disse kaldes formanter eller overtoner. Overtonerne opstår ved resonans og hjælper med at kunne identificere de forskellige vokallyde. Som sagt ligger almindelig tale i frekvensområdet fra 500Hz til 3000Hz, og det kan være svært at skelne imellem de forskellige vokallyde, da de vil have et højt energiniveau ved flere af de samme frekvenser. Hvis overtonerne bliver fjernet, vil man altså have et mindre nuanceret signal, som kan være svært at tyde, [22].

Siden talesignaler nu kan beskrives, kan vi betragte den støj, som påvirker de fleste reelle lydsignaler.

6.2 Støj

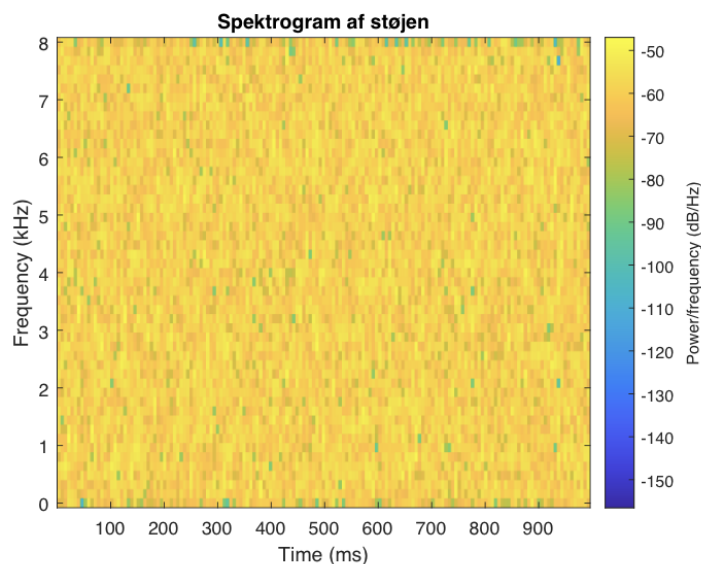
Dette afsnit er baseret på [14, s. 29-31].

Støj kan defineres som et uønsket signal, der forstyrrer kommunikationen eller målingen af et andet signal. Det findes i forskellige former og grader, og det vil næsten altid være til stede i vores omgivelser.

I denne opgave fokuserer vi på støj, der kommer af digital og analog behandling af talesignaler. Denne form for støj kan klassificeres i forskellige kategorier, afhængig af støjens frekvens eller tidskarakteristika. Hvid støj er en af disse kategorier og er den kategori af støj, som opgaven tager udgangspunkt i.

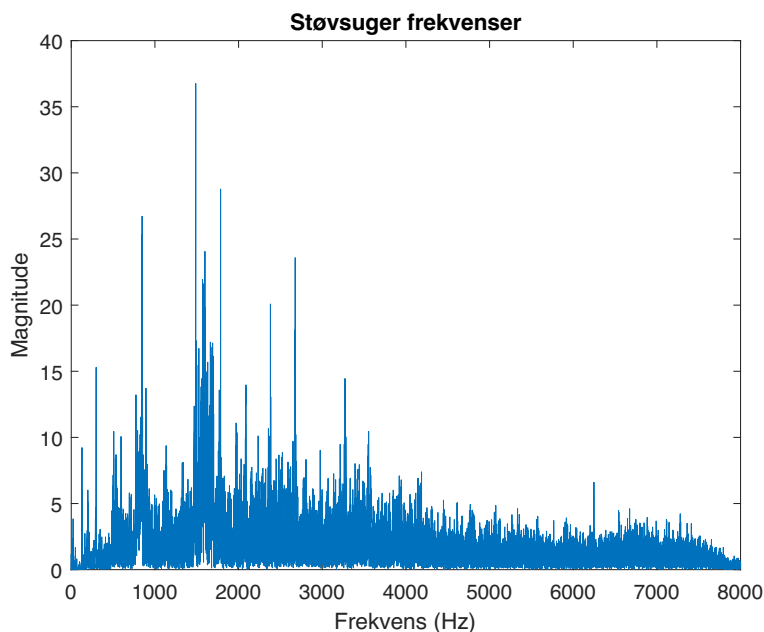
6.2.1 Hvid støj

Hvid støj er defineret som usammenhængende støj, med samme mængde energi ved alle frekvenser. Dette illustreres på figur 6.5.



Figur 6.5: Spektrogram af hvid støj.

Hvid støj har uendelig båndbredde og eksisterer derfor kun som et teoretisk signal. Dog findes der støj i den virkelige verden, som ligner dette signal eksempelvis en støvsuger [23]. Ved at plotte amplituden af en lydoptagelse af støvsugeren vi har haft til rådighed, kan man også se at den har frekvenser i hele spektrummet vi kigger på.



Figur 6.6: Amplitudeplot af støvsuger.

7 | Metode

Da vi nu har introduceret de værktøjer, som vi skal bruge til forsøget, vil vi i dette kapitel beskrive den matematiske metode til at fjerne frekvenser med lav energi fra et talesignal. Vi benytter os af en STFT, SVD og en invers STFT til at udføre dette.

Vi starter med vores samplede talesignal $t[k]$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, hvor N er antallet af samples. Fordi dette er et diskret signal, kan det opskrives på vektorform:

$$t[k] = \begin{bmatrix} t[0] \\ t[1] \\ \vdots \\ t[N - 1] \end{bmatrix}.$$

I nogle tilfælde vil vi være interesseret i at pålægge signalet hvid støj. Dette kan vi gøre ved at addere talesignalet $t[k]$ med et samplet signal bestående af hvid støj, $s[k]$:

$$y[k] = t[k] + s[k],$$

hvor $y[k]$ er det inputsignal, vi ønsker at fjerne støjen fra. Vi laver nu en STFT på inputsignalet $y[k]$, som beskrevet i afsnit 5.3 for at mappe vores inputsignal $y[k]$ over i frekvensdomænet. STFT'en inddeler inputsignalet i blokke af m samples. Dette resulterer i, at vores inputsignal bliver inddelt i n vektorer i $\mathbb{R}^m$, hvor n varierer alt efter hvor meget blokkene overlapper hinanden. Derfor bliver fouriermatricen Ω_m en $m \times m$ -matrix, som set i eksempel 5.1:

$$\Omega_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_m & \omega_m^2 & \omega_m^3 & \dots & \omega_m^{m-1} \\ 1 & \omega_m^2 & \omega_m^4 & \omega_m^6 & \dots & \omega_m^{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega_m^{m-1} & \omega_m^{2(m-1)} & \omega_m^{3(m-1)} & \dots & \omega_m^{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix},$$

hvorpå vi individuelt ganger de n vektorer i $\mathbb{R}^m$ for at bestemme fouriertransformationen. Dette matrix-vektor produkt resulterer i n vektorer i $\mathbb{C}^m$, og disse samles i en $m \times n$ -matrix Y . Vi laver nu en SVD på matricen Y som beskrevet i kapitel 2.4. Dette giver os en $m \times m$ -matrix U , en $m \times n$ -matrix Σ og en $n \times n$ -matrix V^T , som set på figur 2.2. Vi kigger så på singularværdierne fra Σ matricen, som kan give os en ide om størrelsen af energien af de forskellige frekvenser ved forskellige tidspunkter i vores signal. Vi kan så sætte alle singularværdier under en hvis grænse til at være 0. Dette resulterer i en ny $m \times n$ -matrix Σ_r , som ganget på U og dernæst V^T , giver os en ny $m \times n$ -matrix Y_r :

$$Y_r = U \Sigma_r V^T. \quad (7.1)$$

Y_r -matricen mappes nu fra frekvensdomænet til tidsdomænet ved den inverse STFT, så vi får det støjreduceret diskrete signal $y_r[k]$. Dette gøres ved, at vi finder den inverse Diskrete Fourier Transformation til hver vektor i matricen Y_r , som vist i eksempel 5.2. I løbet af den inverse STFT proces tages der højde for de overlappende blokke, så hvert sample kun optræder en gang i det støjreducerede signal $y_r[k]$.

8 | Forsøg

8.1 Forsøgsbeskrivelse

Vi vil gerne lave et forsøg, der kan bekræfte, at vores teori om, hvordan man fjerner baggrundsstøj ved hjælp af en SVD, virker.

Vi har opstillet et forsøg for at se, om det er muligt at fjerne baggrundsstøj fra talesignaler, ved hjælp af en SVD. For at bekræfte at vores teori virker, inden vi bruger metoden på et reelt talesignal, har vi opstillet nogle delforsøg. Vi har valgt at opstille delforsøgene for at bekræfte, at metoden virker på mere simple og forudsigelige signaler, inden vi forsøger os med et talesignal. Vi har valgt at lyd optages i ét lydspor, og gemmes som en .wav fil, da denne filtype er uden komprimering, [24].

I det første delforsøg vælger vi at holde begge vores signaler kunstige. Vi genererer altså et kunstigt talesignal og kunstig støj, som vi lægger ind over. Dette gør vi for at bekræfte, at vores model virker på de mest simple signaler. For hvis modellen fejler her, så fejler den også med mere komplekse signaler.

Vi starter derfor med at generere 3 sinuskurver og lægger dem sammen og bruger dem som "talesignal". Vi vælger 3 forskellige frekvenser for at se, om metoden virker over hele det frekvensspektrum, hvori den menneskelige stemme ligger. Vi pålægger dernæst hvid støj på signalet for at have den baggrundsstøj, som vi gerne vil fjerne, se kapitel 7. Vi bruger den Diskrete Fourier Transformation i form af en STFT på signalet for at få det over i frekvensdomænet, fordi det er de frekvenser med lav energi, vi ønsker at fjerne. Efter vi har transformeret signalet over i frekvensdomænet, bruger vi SVD'en på signalet. Dette giver os en diagonalmatrix med singularværdierne fra inputmatricen. Disse singularværdier kan nu vurderes.

Vi forventer, at der vil være et klart spring i disse singularværdier og alle de singularværdier, som er under dette klare spring, fjerner vi, se (7.1). Hvis vi opnår et acceptabelt resultat i denne del af forsøget, kan vi fortsætte til anden del.

I anden del af forsøget bruger vi et reelt talesignal. Vi har optaget os selv sige vokallyden a i et så støjfrit miljø som muligt. Vi pålægger derefter den samme hvide støj, som vi gjorde i første del. Vi vælger at pålægge den hvide støj syntetisk for at kunne være sikre på, at støjen har samme energi over hele frekvensdomænet. Vi bruger så samme fremgangsmåde som i første del af forsøget, som beskrevet i kapitel 7. Vi forventer, at det muligvis bliver sværere at skelne i singularværdierne, hvad der er talesignal, og hvad der er støj. Dette forekommer, fordi et reelt talesignal har et væsentligt mere kompliceret frekvensbillede end ved de 3 sinuskurver. Der er mange flere frekvenser, ergo er der mange flere frekvenser, der har lignende singularværdier. Derfor forventer vi, at der ikke bliver så stort et knæk i

singularværdierne, som der er i første del.

Tredje og sidste del af forsøget er så det reelle forsøg. Her vil vi gerne optage et reelt lydclip. En af gruppemedlemmerne siger igen en vokallyd a, og der forekommer støj i baggrunden af klippet. Vi vil, med det kendskab til forsøgsteknikken og fremgangsmåden vi har fra de to ovenstående forsøg, se om vi kan identificere talesignalet i singularværdierne og på den måde også fjerne så meget af støjen som muligt. Alle plots fra forsøgene kan i øvrigt ses i fuld størrelse i appendiksen.

8.2 Forsøgsresultater

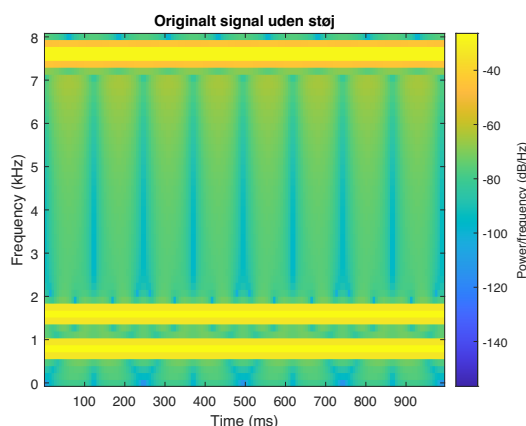
I den første del af forsøget består signalet af 3 sinuskurver og hvid støj, der er lagt oveni.

Vi har valgt at lave de 3 sinuskurver:

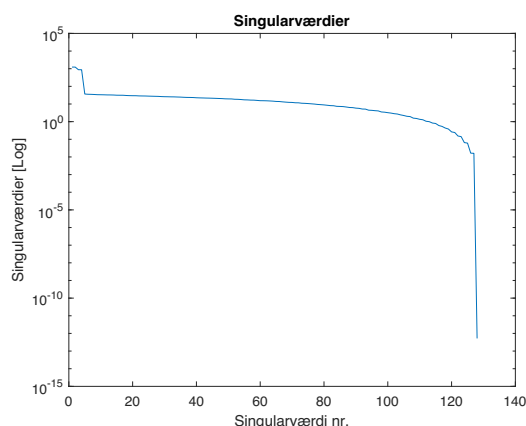
$$y(t) = \sin(1600\pi t) + \sin(2400\pi t) + \sin(15200\pi t), \quad (8.1)$$

med en frekvens på henholdsvis 800Hz, 1600Hz og 7600Hz. Vi har valgt at lægge de 3 frekvenser med forskelligt mellemrum for at se, om metoden kan skelne mellem 2 frekvenser, der ligger forholdsvis tæt. Vi har valgt at lægge den sidste frekvens i toppen af det menneskelige talespektrum for at se, om metoden opfører sig på samme måde i begge ender af spektret.

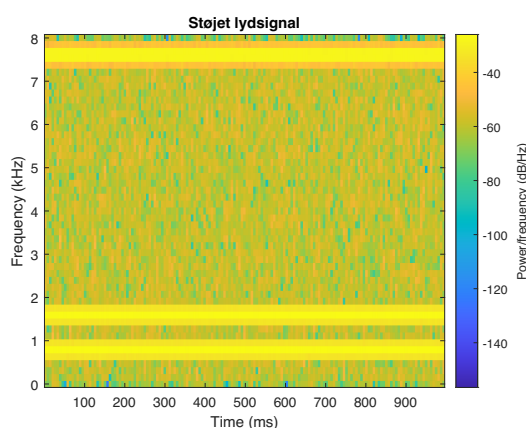
På figur 8.1a, ses det så, at der er meget høj energi omkring de 3 valgte frekvenser i spektrogrammet. Spektrogrammet har vi lavet ved hjælp af en STFT, som beskrevet i afsnit 5.3. Vi pålægger derefter signalet hvid støj, og hvis man kigger på figur 8.1b, kan man se, at spektrogrammet har fået en anden farve i baggrunden. Dette er fordi, vi har pålagt en hvid støj, som øger energien ved alle frekvenser. Vi bruger nu STFT'en, for at transformere vores signal fra tidsdomænet til frekvensdomænet. Vi kan nu bruge en SVD på vores sinuskurve med støj på. Denne faktorisering resulterer i 3 matricer. Den ene matrix, Σ , indeholder singularværdierne. Hvis vi plotter singularværdierne som i figur 8.1c, kan vi se et tydeligt knæk ved en værdi på 36, og vi kan nu sætte alle singularværdier under 36 til at være lig nul. Vi kan nu, efter at have fjernet alle de lave singularværdier, gange vores matricer sammen igen. Vi kan nu lave et spektrogram af den støjreducerede matrix. Dette resultat kan ses på figur 8.1d.



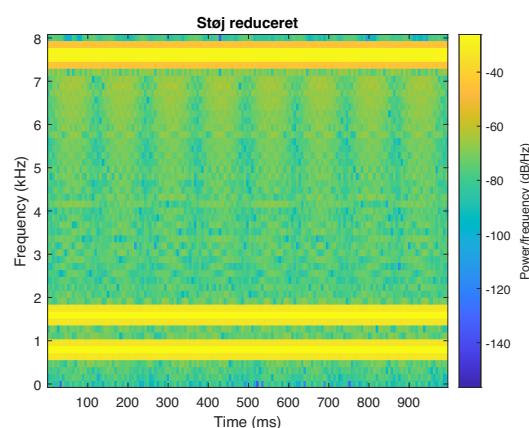
(a) Spektrogram af sinuskurve uden støj.



(c) Plot over singularværdier.



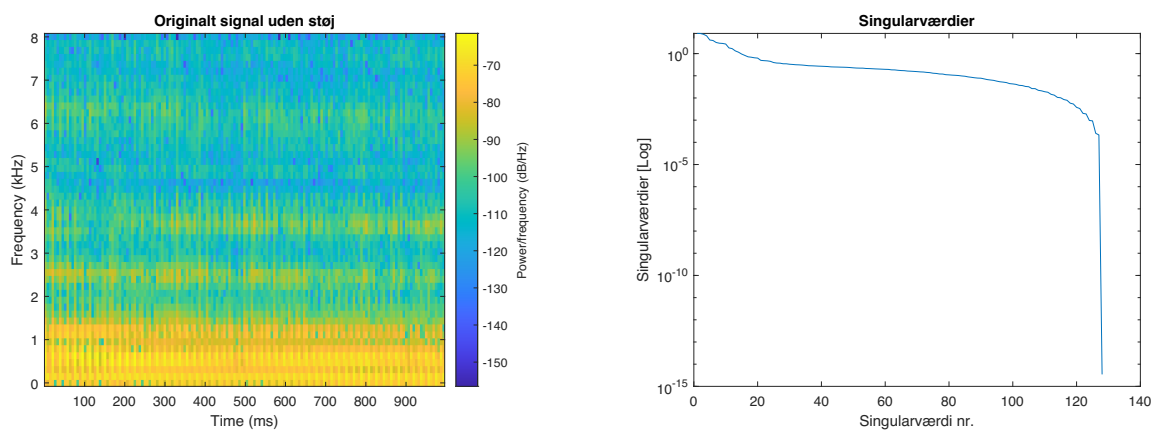
(b) Spektrogram af sinuskrue med støj.



(d) Spektrogram af støjreduceret sinuskrue.

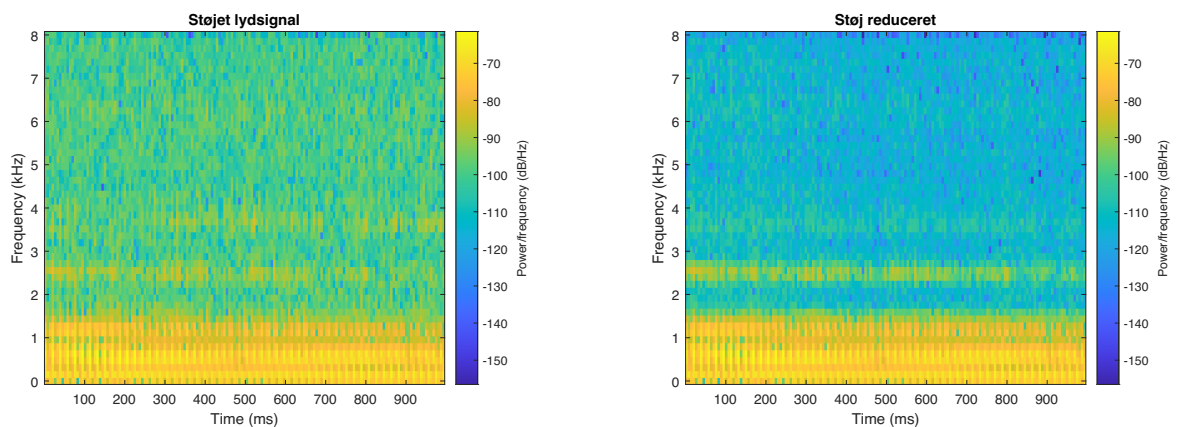
Figur 8.1: Plots til første delforsøg.

Vi har i anden del af forsøget optaget et lydclip af en af gruppemedlemmerne, der siger vokallyden a. Dette talesignal kan vi se på figur 8.2a. Vi kan se en meget høj energi ved grundfrekvensen, og vi kan se en energi ved de forskellige overtoner. Vi kan se, at den energi bliver mindre og mindre jo længere op i overtonerne, vi kommer. Vi pålægger derefter igen hvid støj til vores inputsignal. Spektrogrammet af det simple talesignal med hvid støj kan ses på figur 8.2b. Man kan se, at overtonerne næsten forsvinder i støjen. Vi bruger så STFT'en for at få signalet fra tidsdomænet til frekvensdomænet. Vi bruger igen en SVD på det transformerede signal og plotter singularværdierne fra Σ matricen. Dette plot kan ses på figur 8.2c. Vi har ikke et ligeså tydeligt knæk i kurven over singularværdier, som vi havde på figur 8.1c. Vi har derfor i stedet prøvet os frem for at se, hvor vi fik det bedste resultat. Vi kom frem til, at hvis vi vil beholde så meget af talesignalet som muligt, skulle vi sætte grænsen ved 0.5. Vi fjernede derfor alt under den værdi. Vi gangede matricerne sammen igen, og resultatet af det støjreducerede signal kan ses på figur 8.2d. Man kan her se, at vi har mistet lidt af energien ved de højeste overtoner forhold til inputsignalet.



(a) Spektrogram af optaget simpelt talesignal.

(c) Plot over singularværdier.

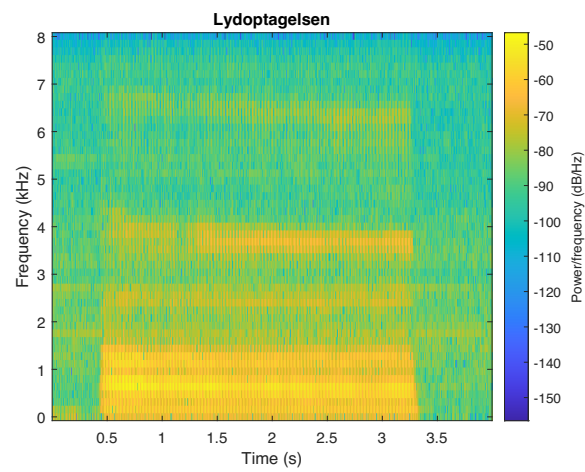


(b) Spektrogram af simpelt talesignal med støj.

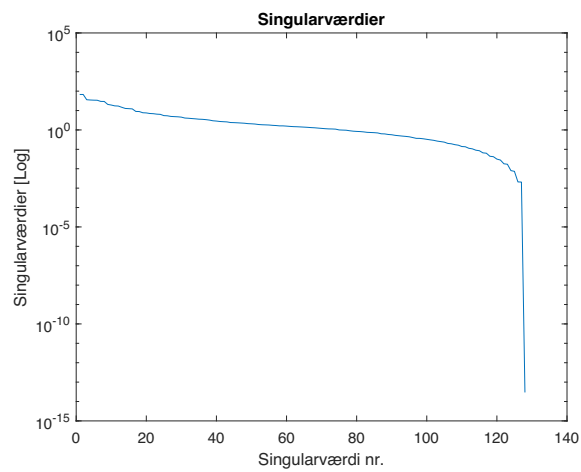
(d) Spektrogram af støjreduceret simpelt talesignal.

Figur 8.2: Plots til andet delforsøg.

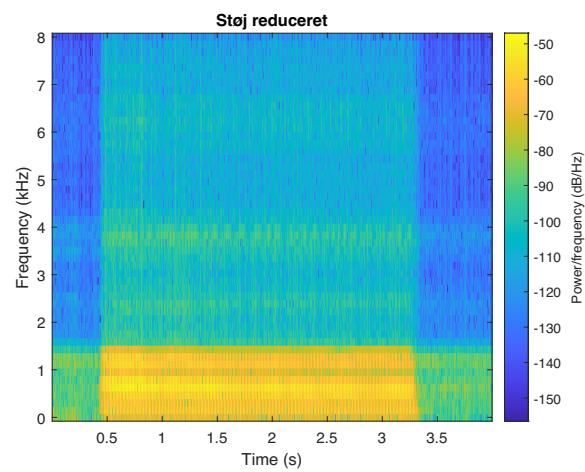
I den sidste del af forsøget har vi prøvet vores metode af på et reelt talesignal med rigtig støj i baggrunden. Vi har igen optaget et simpelt talesignal af et gruppemedlem, der siger vokallyden a. Vi har så placeret en tændt støvsuger i baggrunden, der virker som den støj, vi ønsker at fjerne. Man kan på figur 8.3a se spektrogrammet af dette inputsignal. Vi kan se at støjen som støvsugeren genererer ligger over hele frekvensspektret, meget ligesom hvid støj gjorde. Vi transformerer så signalet fra tidsdomænet til frekvensdomænet, ved hjælp af STFT'en. Vi har igen brugt en SVD på det transformerede inputsignal. På figur 8.3b kan man se et plot over singularværdierne fra denne SVD. Man kan se, at hvor vi i de tidligere 2 forsøg har haft et mere tydeligt knæk i kurven, har vi her en mere glat kurve i starten. Vi har derfor prøvet os lidt frem for, hvor grænsen skal gå. Dette har resulteret i, at vi har fjernet alle singularværdierne under 7.5. Vi har brugt den inverse STFT på signalet, og resultatet af dette kan ses på figur 8.3c.



(a) Spektrogram af lydclip med rigtig støj.



(b) Plot over singularværdier.



(c) Lydclip med rigtig støj i baggrunden, reduceret.

Figur 8.3: Plots til endelige forsøg.

I forsøget har vi altså helt generelt haft den fremgangsmåde, at vi har startet med at producere vores inputsignal med støj. Vi har dernæst transformeret signalet fra tidsdomænet til frekvensdomænet ved hjælp af STFT'en. Vi bruger dernæst en SVD, analyserer og fjerner de lave singularværdier, som vi forventer er støj, og derefter ganger vi matricerne sammen igen. Vi kan nu bruge den inverse STFT og komme tilbage til tidsdomænet, så vi har vores støjreducerede signal. Vi har delt vores forsøg op i 3 dele. I første del holder vi vores inputsignal og støj kunstigt, og her kan vi fjerne det meste støj. Anden del holder vi støjen kunstig, men inputsignalet bliver reelt, og her kan vi fjerne en del støj men ikke det hele. I tredje del er både inputsignalet og støjen reel, og i dette tilfælde kan vi fjerne en del støj, men det går også udover kvaliteten på outputtalesignalet. For at se nærmere på figurer i fuld størrelse, er de at finde i appendix C, D og E.

9 | Diskussion

Dette kapitel indeholder en diskussion baseret på den teori, der er gennemgået i rapporten for at evaluere forsøgenes fremgangsmåde. Herunder diskuteres afvigelsen af vores metode, samt bestemmelsen af samplingsfrekvensen. Kapitlet er baseret på [25] og [26].

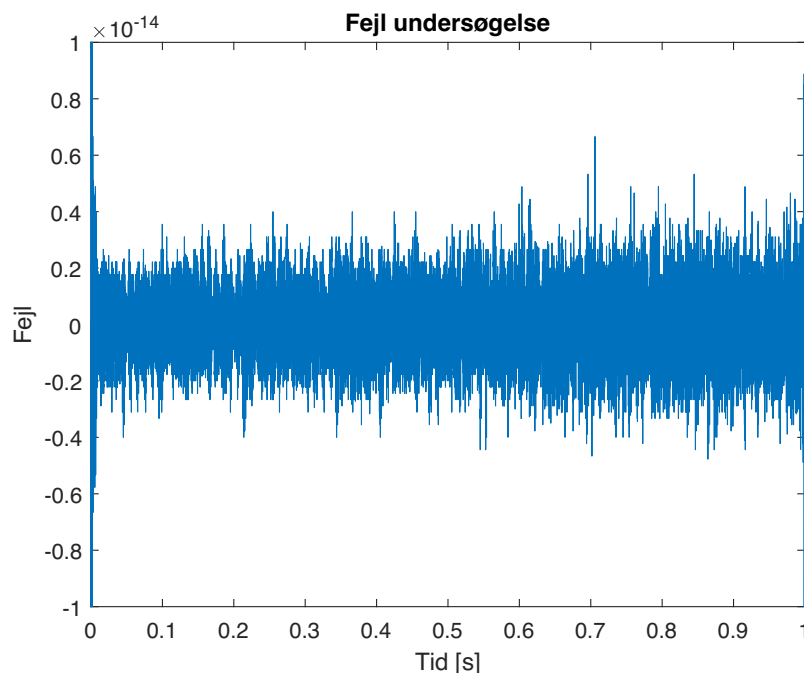
9.1 Systematiske fejl

Vi har set i afsnit 4.2.2, at kun et endeligt antal tal kan repræsenteres på vores 64-bit computer. Alle tal, som ligger i vores udfaldsrum, skal derfor repræsenteres med et tal fra vores endelige mængde, hvorfor talværdien approksimeres. Denne approksimation sker ved trunkering og afrunding. I forsøgene opstår der trunkering- og afrundingsfejl, da Matlab anvender IEEE754 standarden til at repræsentere flydende tal.

Trunkeringsfejl opstår ved de numeriske processer, vi benytter for at kunne approksimere uendelige talrækker såsom π , e og $\sin$. I diskussionen tages der udgangspunkt i et kunstigt forsøg, hvor vi simulerer tre sinuskurver, som set i (8.1), og dette signal anvender vi vores metode på, som beskrevet i kapitel 7. Det kunstige forsøg har til formål at kunne belyse eventuelle fejl ved anvendelse af vores metode.

Her forekommer blandt andet trunkeringsfejl, fordi lydsignalet er repræsenteret ved tre sinuskurver, som hver især anvender uendelige talrækker, π og $\sin$. Dernæst sker der trunkeringsfejl, når vi benytter STFT'en og ISTFT'en, da de indeholder den uendelige talrække e .

Den næste type fejl der opstår er afrundingsfejl, som forekommer i forbindelse med repræsentation af tal og aritmetiske operationer, der benyttes ved implementationen af STFT, SVD og ISTFT. Årsagen til at der fremkommer afrundingsfejl, er fordi Matlab bruger IEEE754 standarden. Denne har en begrænsning på 64 bits, som giver os en maskinepsilon på $\varepsilon = 2^{-52} \approx 2.2204 \cdot 10^{-16}$. Ud fra det kunstige forsøg er der blevet approksimeret en fejl af størrelsesordenen 10^{-14} , som kan ses på figur 9.1.



Figur 9.1: Systematisk fejl ved kunstig lyd.

På figur 9.1 er der vurderet en fejl, som er så lille og tæt på maskinepsilon, at årsagen må være de systematiske fejl, der opstår i Matlab.

9.2 Diskussion af samplingsfrekvensen

Vores samplingsfrekvens skulle ifølge afsnit 4.2.1 være på 8kHz, men da vi anvendte den foreslåede samplingsfrekvens, mistede vi nogle af formanterne i vores talesignal, som beskrevet i kapitel 6. Derfor fordoblede vi samplingsfrekvensen til 16kHz, som vi fandt tilfredsstillende, da den indeholdte overtonerne. Som nævnt i afsnit 4.2.1, vil man ofte sample 5-20 gange højere end højeste frekvens tilstede i det samplede signal, men da vi har beskæftiget os med et relativt simpelt talesignal, kunne vi nøjes med at fordoble samplingsfrekvensen. Denne løsning førte til en mindre mængde data for computeren at arbejde med.

9.3 Fejl ved sampling

Når der samples med 16kHz, vil der stadigvæk være små mængder data, som vil gå tabt. Dette er blandt andet fordi der eksisterer en mængde data mellem hvert sample, som vi ikke registrerer. Den samplede data kvantiseres også for at computeren kan arbejde videre med signalet. Dette leder til yderligere informationstab som beskrevet i afsnit 4.2.2, hvor fejlen udtrykkes ved ligning (4.3).

9.4 Forsøget og testkravene

For at kunne besvare testkravene, som set i afsnit 1.4, har vi ved andet og tredje forsøg været nødt til at prøve os frem. Dette betyder, at vi har fjernet så meget baggrundsstøj som muligt, uden at forringe signalets kvalitet. Dette er gjort ved at udpege lave singularværdier ved figur 8.2c, hvoraf de fjernes og vi lytter til det nye signal. Denne metode med at prøve sig frem kræver en del tid og energi, som man muligvis ikke har, hvis man skal filtrere støj til online kommunikation.

10 | Konklusion

Formålet med denne rapport har været at finde en grænse mellem støjreducering og kvaliteten af det støjreducerede talesignal.

Fremgangsmåden, som beskrevet i kapitel 7, har vist sig at akkumulere systematiske fejl i form af trunkering-og afrundingsfejl. Et eksempel på de systematiske fejl er illustreret på figur 9.1, hvor fejlen er så tæt på maskinepsilon, at den vurderes til at være ubetydelig. Derudover kan der findes afvigelser ved samplingsprocessen, da der vil gå information tabt ved den digitale konvertering. Denne afgivelse er uundgåelig, men ved hjælp af afsnit 4.2.1 blev samplingsfrekvensen vurderet til 16kHz med hensyn til at få så meget information samlet, uden at datamængden ville blive for stor.

Ved det første testforsøg med kunstig signal og hvid støj, formåede mængden af den reduceret støj at blive så høj, at forskellen på det originale lydclip og den reduceret version var så betydelig lille, at man ikke kunne høre forskel. Derved opnåede vi det første testkrav og kan konkludere, at det er muligt at fjerne støj med den valgte metode. Ved det andet testforsøg med a-vokal-lyd signalet og hvid støj, kunne der fjernes en del af den kunstige støj men ikke alt, da vi begyndte at fjerne nogle overtoner på lydklippet. Derved kan vi konkludere, at selvom det er mere besværligt at reducere støj fra et simpelt talesignal, er det stadig muligt.

Da disse to delforsøg lykkedes, kvalificerede vores metode sig til at kunne besvare vores problemformulering, som lyder:

Hvor godt kan man ved hjælp af lineær algebra og den Diskrete Fourier Transformation fjerne baggrundsstøj fra et talesignal uden at forringe signalet?

Sidst ved det endelige forsøg med a-vokal-lyd signal og virkelig baggrundsstøj endte vi kun med at kunne fjerne en minimal del af støjen, før vores talesignal blev forringet. Deraf kan vi konkludere, at det ved hjælp af lineær algebra og den Diskrete Fourier Transformation er muligt at fjerne baggrundsstøj fra et virkelig talesignal, dog fungerer det ikke optimalt.

Hvis metoden skulle bruges til at fjerne støj ved online kommunikation, ville det formentlig ikke fungere særlig godt. Det, som der menes med godt, er, at informationen, som lyd-klippet bærer, ikke må gå tabt på baggrund af reduceringen, desuden skal tydeligheden af lydklippetets kvalitet heller ikke gås på kompromis med. Vi oplevede ved det endelige forsøg, at det lød som om, at den talende personen var under vand. Ud fra dette kan vi konkludere, at perfekt støjreducering ikke er en mulighed ved anvendelse af denne metode, da vi oplevede dæmpning af ønskede frekvenser og tilstedeværelse af uønskede frekvenser.

Til slut kan vi konkludere, at den endelige fremgangsmåde med at prøve sig frem, se afsnit

8.2, ikke ville være optimal til online kommunikation, da dette foregår live og indeholder mere komplicerede talesignaler end blot vokallyden a. For at optimere metoden ville processen med at prøve sig frem skulle elimineres ved at gøre metoden selvvirkende, som kunne opnås ved yderligere testforsøg med mere komplicerede talesignaler.

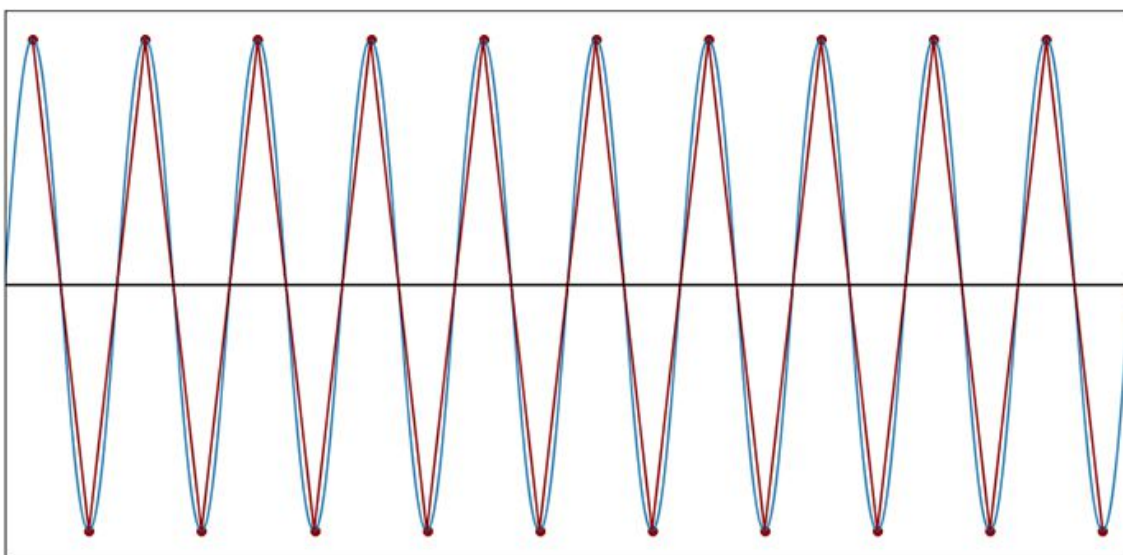
Litteratur

- [1] S. K. Allan Sørensen, “90.000 flere vil arbejde hjemme efter coronakrisen,” 2021, Link: <https://www.danskindustri.dk/arkiv/analyser/2021/1/90.000-flere-vil-arbejde-hjemme-efter-coronakrisen/>, [Online; accessed 07-april-2021].
- [2] J. Dalberg-Larsen, “Klumme: Dårlig lyd koster i tabt arbejdstid,” 2020, Link: <https://itwatch.dk/Klummer/article12635979.ece>, [Online; accessed 07-april-2021].
- [3] T. Bøttcher, “Undersøgelse: Store udfordringer med online undervisning,” 2020, Link: <https://www.akademikerbladet.dk/aktuelt/2020/juni/undersogelse-store-udfordringer-med-online-undervisning>, [Online; accessed 07-april-2021].
- [4] D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 5th ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2020, ISBN: 978-1-83961-632-7.
- [5] H. V. C. og Bo Rosbjerg, *Definitioner, formler og eksempler*. AAU, 2016.
- [6] A. Quek, 2015, Link: <https://alyssaq.github.io/2015/singular-value-decomposition-visualisation/>, [Online; accessed 02-maj-2021].
- [7] J. VanderPlas, 2019, Link: https://www.astroml.org/book_figures/chapter7/fig_svd_visual.html, [Online; accessed 18-maj-2021].
- [8] H. Abdullatif, 2019, Link: <https://towardsdatascience.com/svd-8c2f72e264f>, [Online; accessed 18-maj-2021].
- [9] 3Blue1Brown, “Dot products and duality | Essence of linear algebra, chapter 9,” Link: <https://www.youtube.com/watch?v=LyGKycYT2v0>, [Online; accessed 25-april-2021].
- [10] J. Bendtsen, *Lecture Notes for Data*, 1st ed. Department of Electronic Systems: Aalborg University, 2021.
- [11] A. V, *Discrete-time signal processing*, third pearson new international edition. ed. Pearson Education, 2014, ISBN: 9781292038155.
- [12] R. microphones, “Røde NT-USB,” 2021, Link: <http://www.rote.com/microphones/nt-usb>, [Online; accessed 29-marts-2021].
- [13] NEUMANN, “What is a condenser microphone,” 2021, Link: <https://www.neumann.com/homestudio/en/what-is-a-condenser-microphone>, [Online; accessed 29-marts-2021].
- [14] S. V. Vaseghi, *Advanced Digital Signal Processing And Noise Reduction*, 2nd ed. John Wiley & Sons, 2000, ISBN: 0471626929.

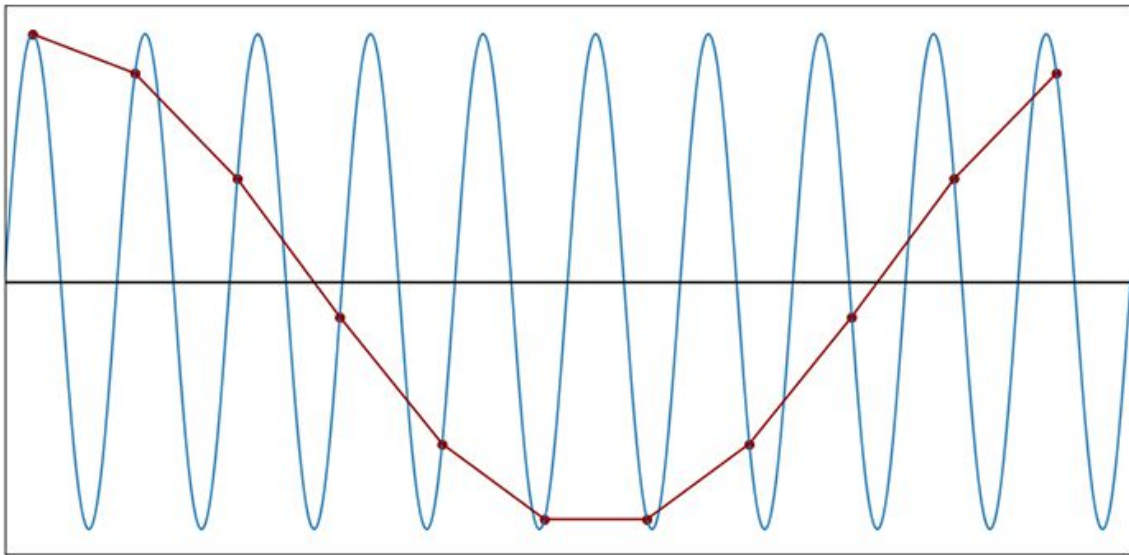
- [15] R. Kelm, “The Nyquist-Shannon Theorem,” 2020, Link: <https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/nyquist-shannon-theorem-understanding-sampled-systems/>, [Online; accessed 27-april-2021].
- [16] M. W. Wong, *Discrete Fourier Analysis*, elektronisk udgave. ed., ser. Pseudo-Differential Operators, Theory and Applications ; 5. Basel: Springer Basel AG, 2011, ISBN: 9783034801164.
- [17] C. E. Robert A. Adams, *Calculus Volume 1 & 2*, 9th ed. Pearson, 2020, ISBN: 978-0-13-415436-7.
- [18] Tværfagligt-Center, “Funktion af stemmelæberne,” 2021, Link: <https://tcbu.vejle.dk/sprog/haes-stemme/hvordan-fungerer-min-stemme/>, [Online; accessed 16-marts-2021].
- [19] R. K. Jakobsen, “Funktion af stemmelæberne videnskab.dk,” 2015, Link: <https://videnskab.dk/krop-sundhed/menneskelige-stemmeband-dyrket-i-petriskal-giver-lyd-i-hundestruber>, [Online; accessed 16-marts-2021].
- [20] S. K. D. B. C. A. . A. S. Fabian Thornton, Michael Döllinger, “Impact of Subharmonic and Aperiodic Laryngeal Dynamics on the Phonatory Process Analyzed in Ex Vivo Rabbit Models,” 2019, Link: <https://www.mdpi.com/2076-3417/9/9/1963/htm>, [Online; accessed 27-april-2021].
- [21] H. C. K. o. B. L. H. Mikkel Holmelund, Lars Holme Nielsen, “Hørenedsættelse,” 2020, Link: <https://www.sundhed.dk/sundhedsfaglig/laegehaandbogen/oere-naese-hals/symptomer-og-tegn/hoerenedsaettelse/>, [Online; accessed 9-maj-2021].
- [22] J. Rischel, 2009, Link: <https://denstoredanske.lex.dk/formant>, [Online; accessed 18-maj-2021].
- [23] AudioNova, “Hvid Støj,” 2019, Link: <https://www.audionova.dk/blog/hoerelse-og-hoeretaal/hvid-stoej/>, [Online; accessed 10-maj-2021].
- [24] Audacity.org, “.wav,” 2021, Link: https://manual.audacityteam.org/man/export_formats_supported_by_audacity.html, [Online; accessed 10-maj-2021].
- [25] T. A. . K. K. Peter R. Turner, *Applied Scientific Computing With Python*. Springer, 2018, ISBN:9783319895741.
- [26] T. MathWorks, “Floating-Point Numbers,” 2021, Link: https://se.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/floating-point-numbers.htmlresponsive_offcanvas, [Online; accessed 18-maj-2021].

Appendiks

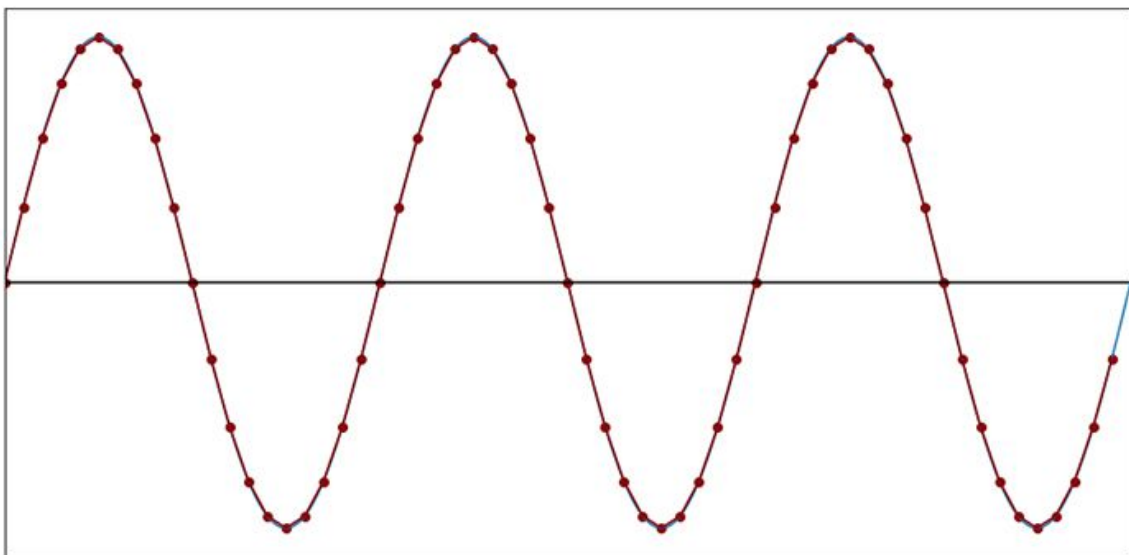
A | Dataopsamling



Figur A.1: Plot af samplingsraten 2Hz.

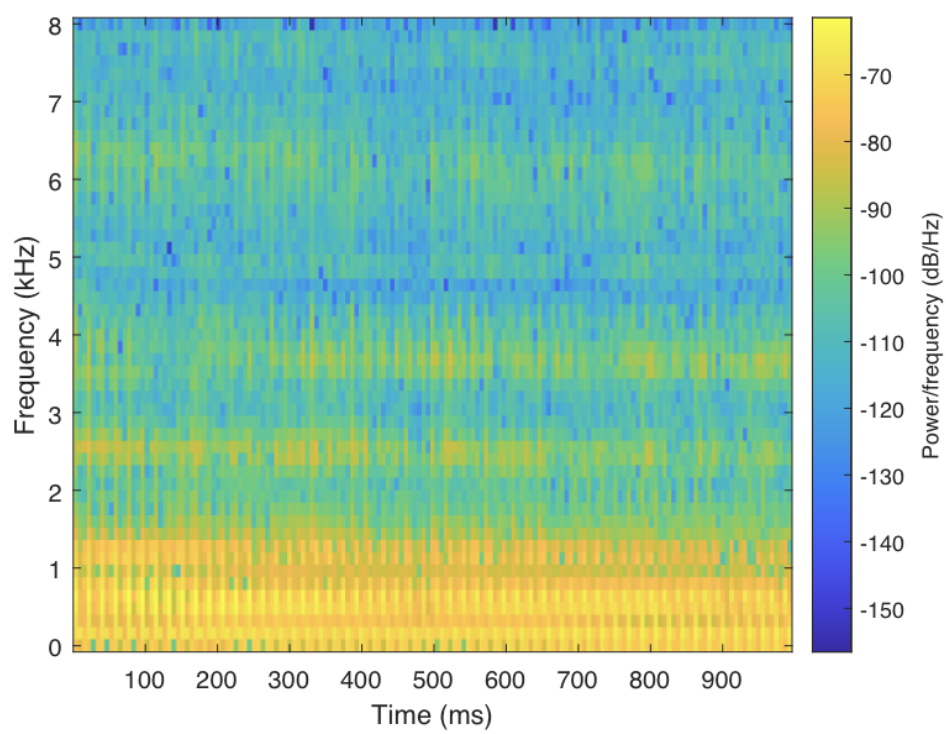


Figur A.2: Plot af samplingsraten 1.1Hz.

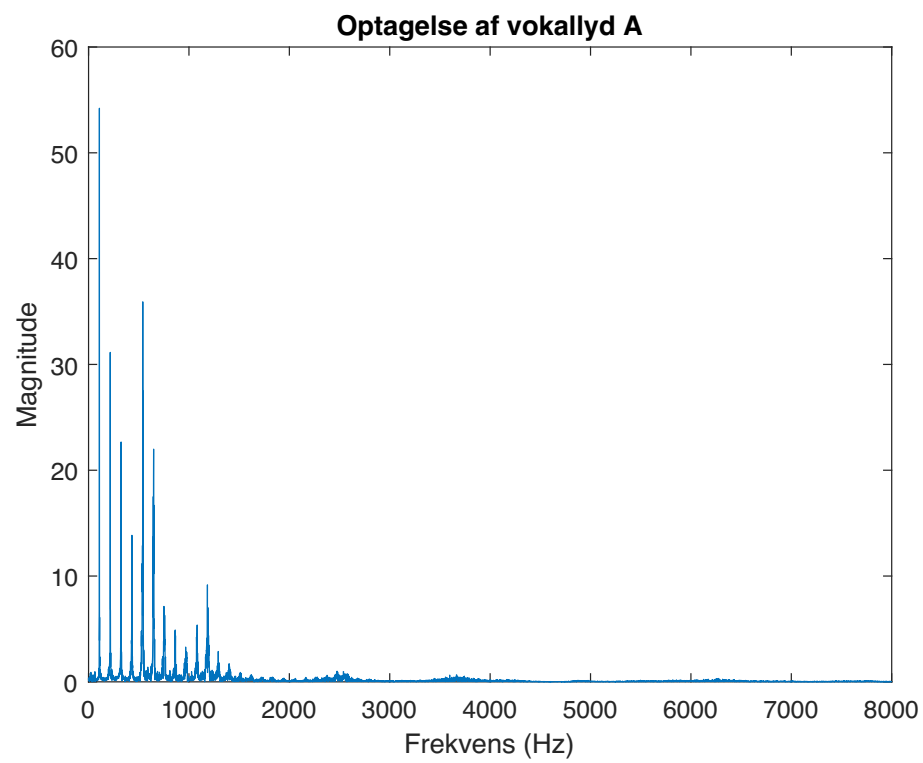


Figur A.3: Plot af samplingsraten 20Hz.

B | Talesignal

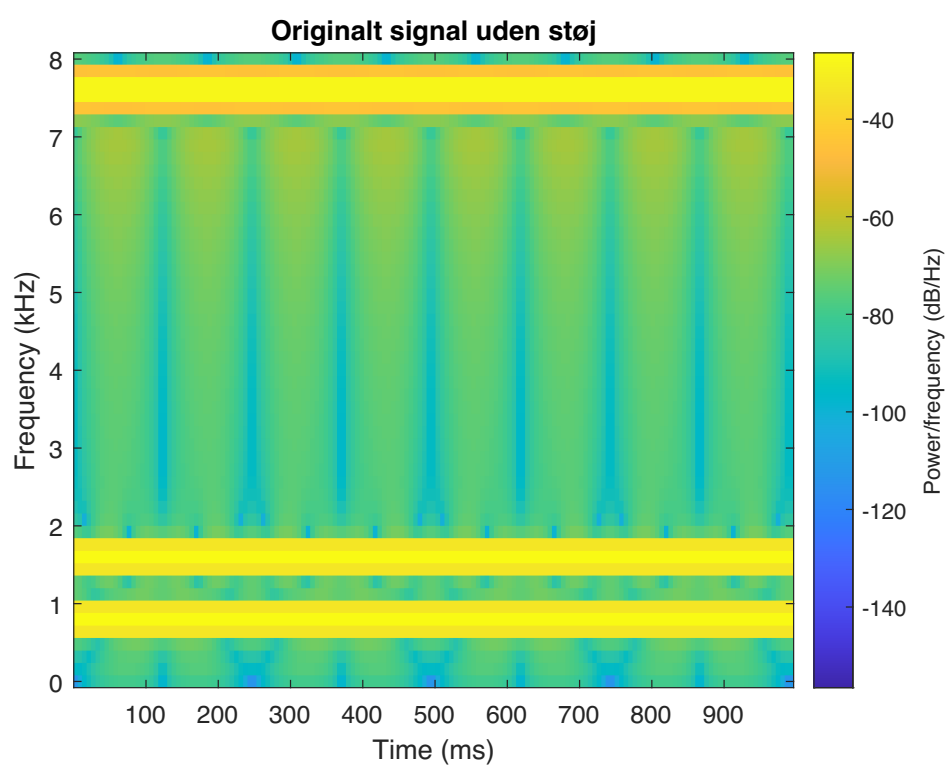


Figur B.1: Spektrogram for vokallyden a.

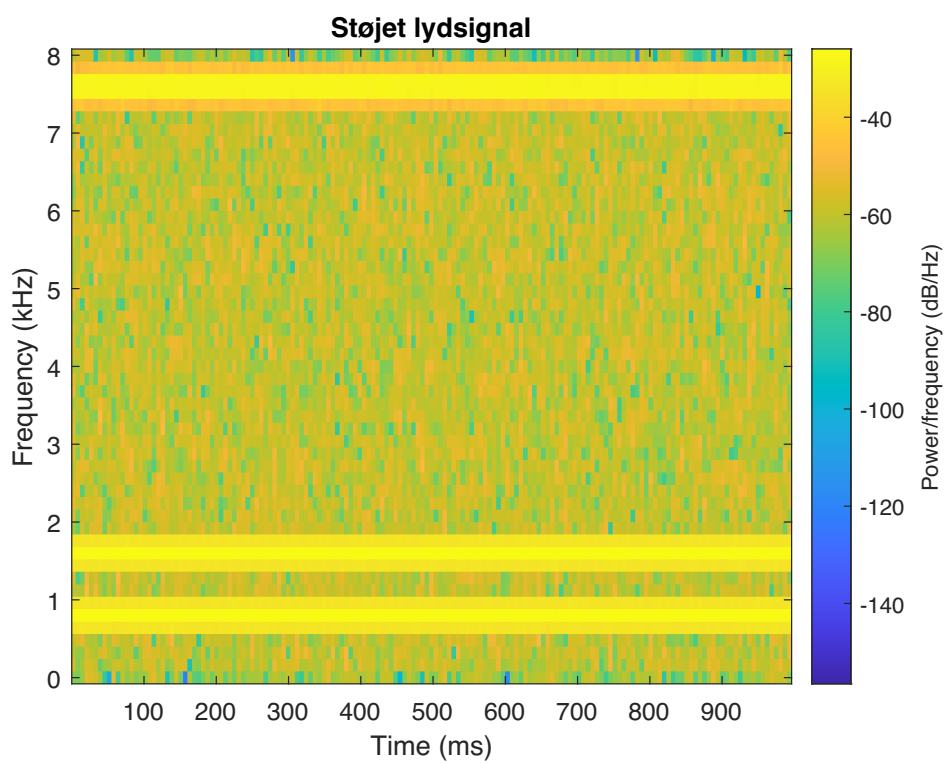


Figur B.2: Amplitudeplot for vokallyden a.

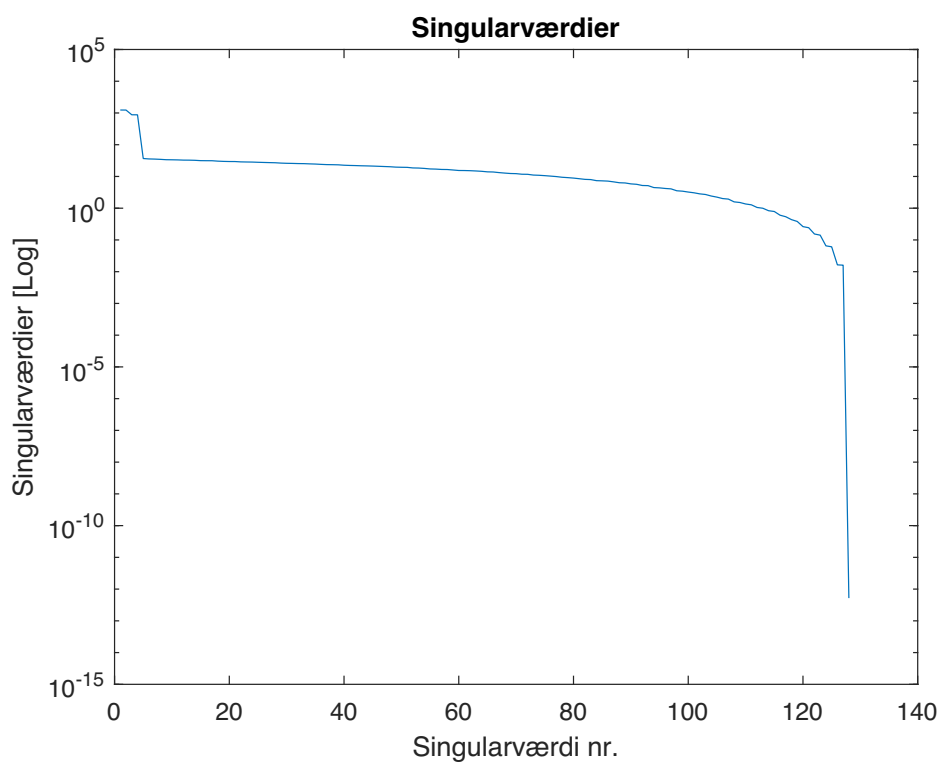
C | Delforsøg 1



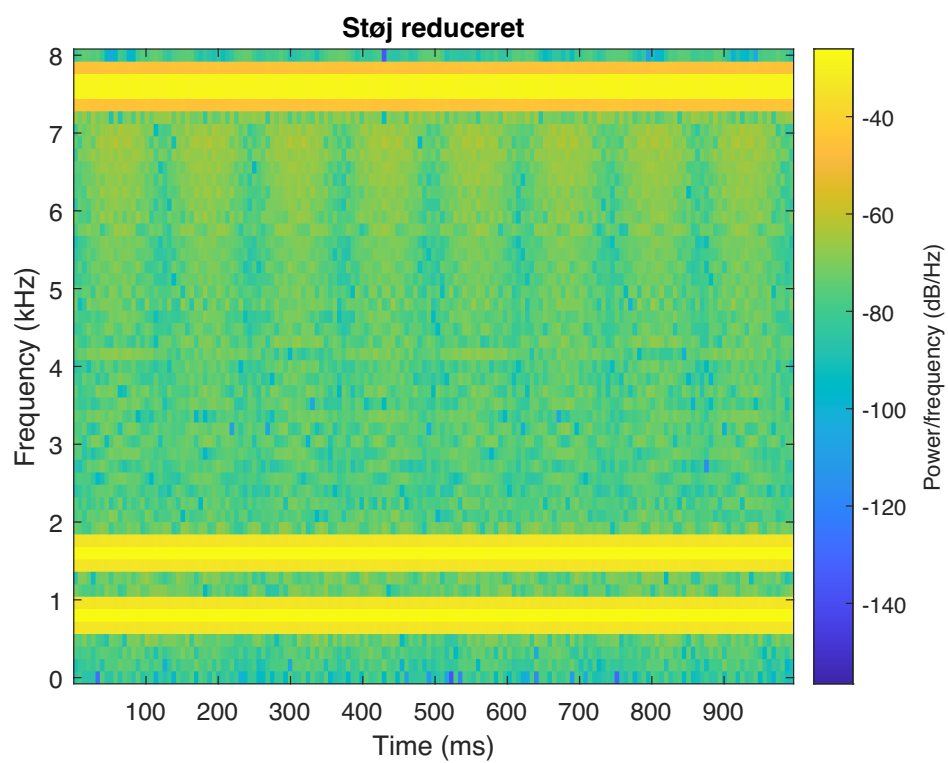
Figur C.1: Spektrogram af sinuskurve uden støj.



Figur C.2: Spektrogram af sinuskrue med støj.

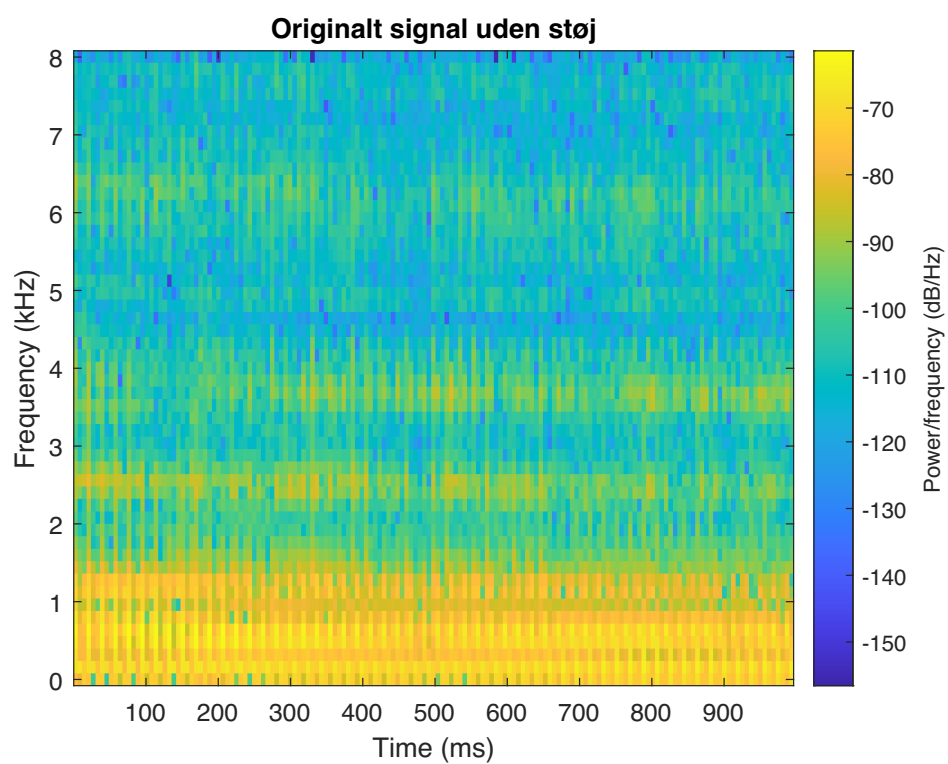


Figur C.3: Plot over singularværdier.

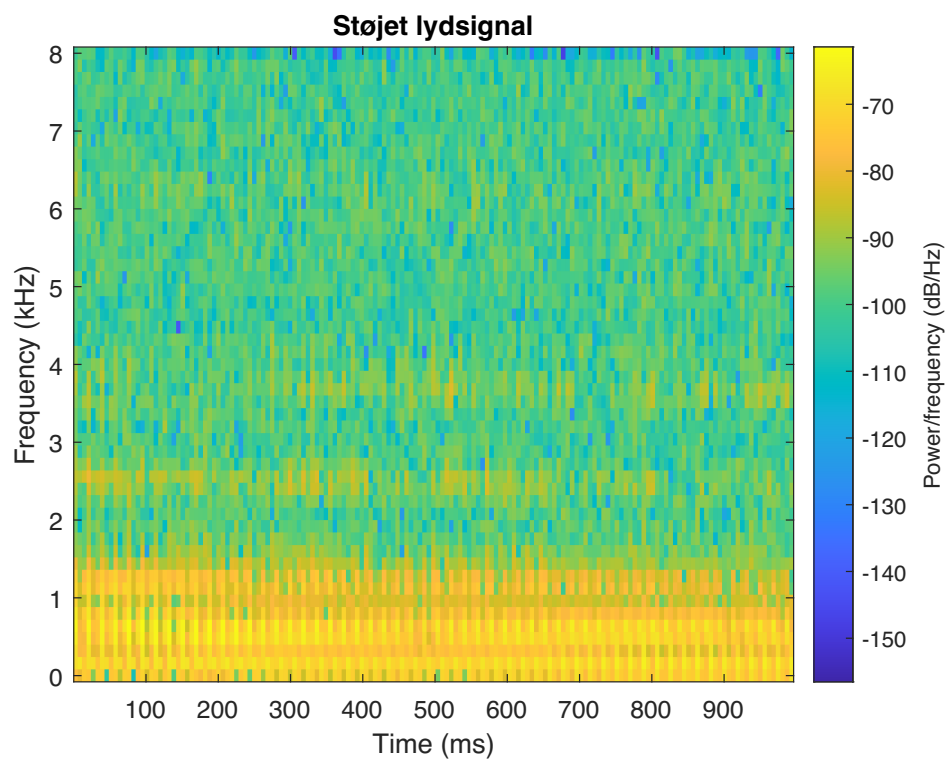


Figur C.4: Spektrogram af støjreduceret sinuskurve.

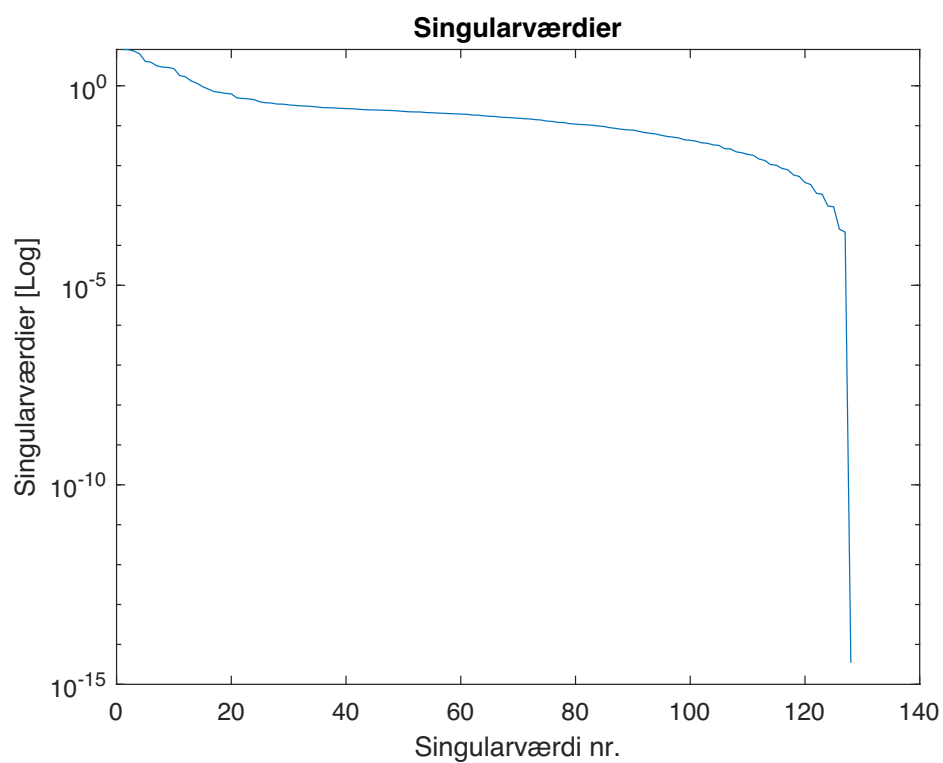
D | Delforsøg 2



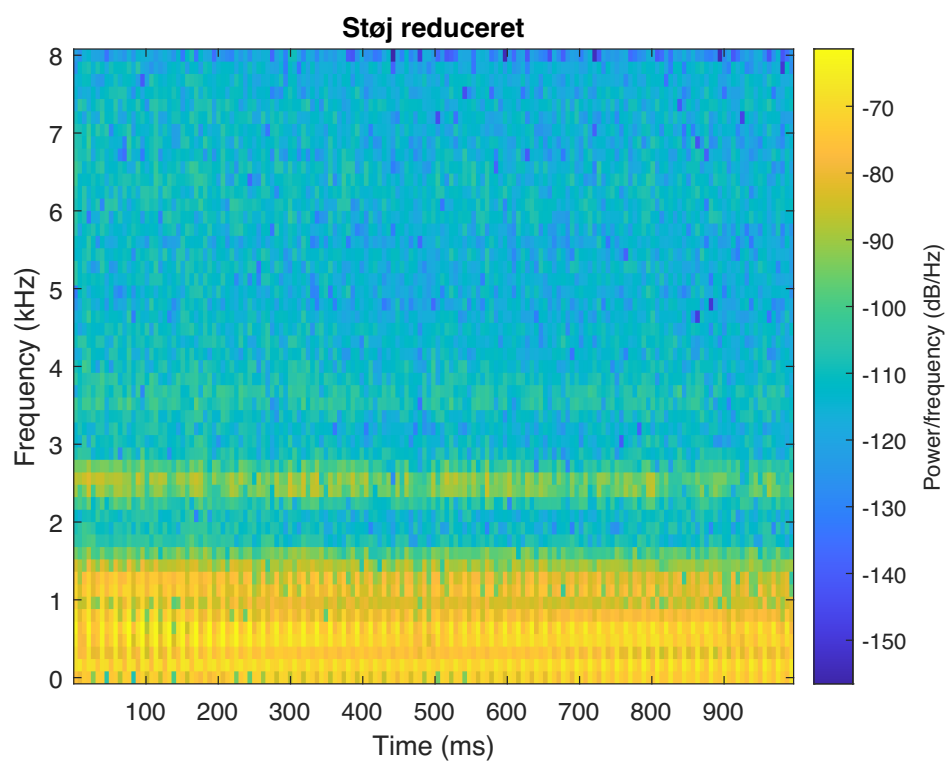
Figur D.1: Spectrogram af optaget simpelt talesignal.



Figur D.2: Spectrogram af simpelt talesignal med støj.

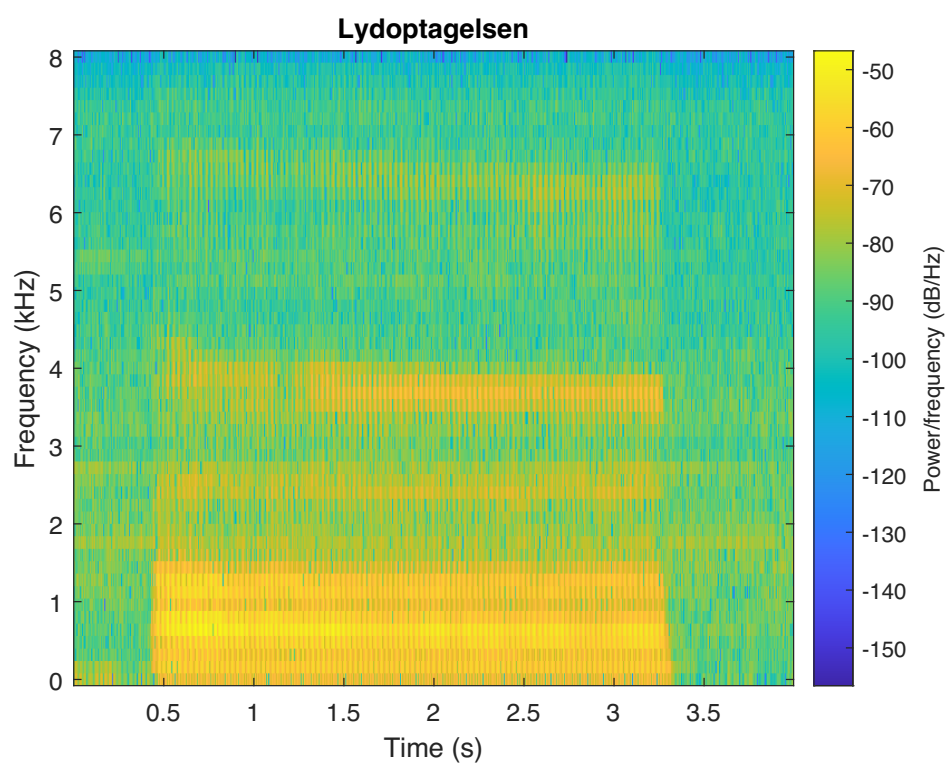


Figur D.3: Plot over singularværdier.

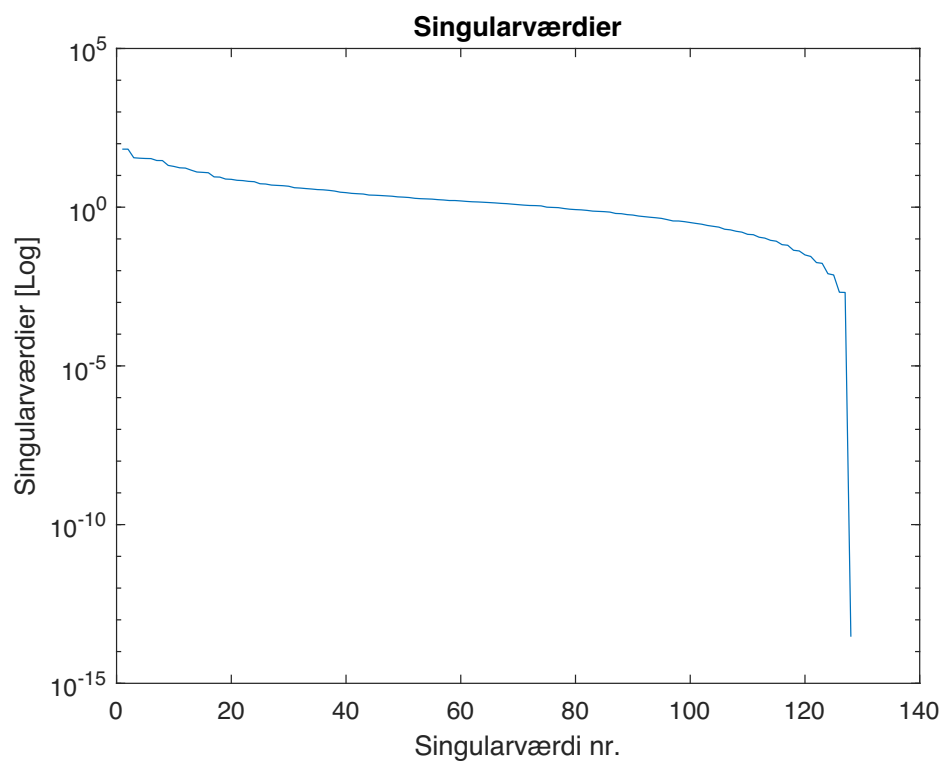


Figur D.4: Spectrogram af støjreduceret simpelt talesignal.

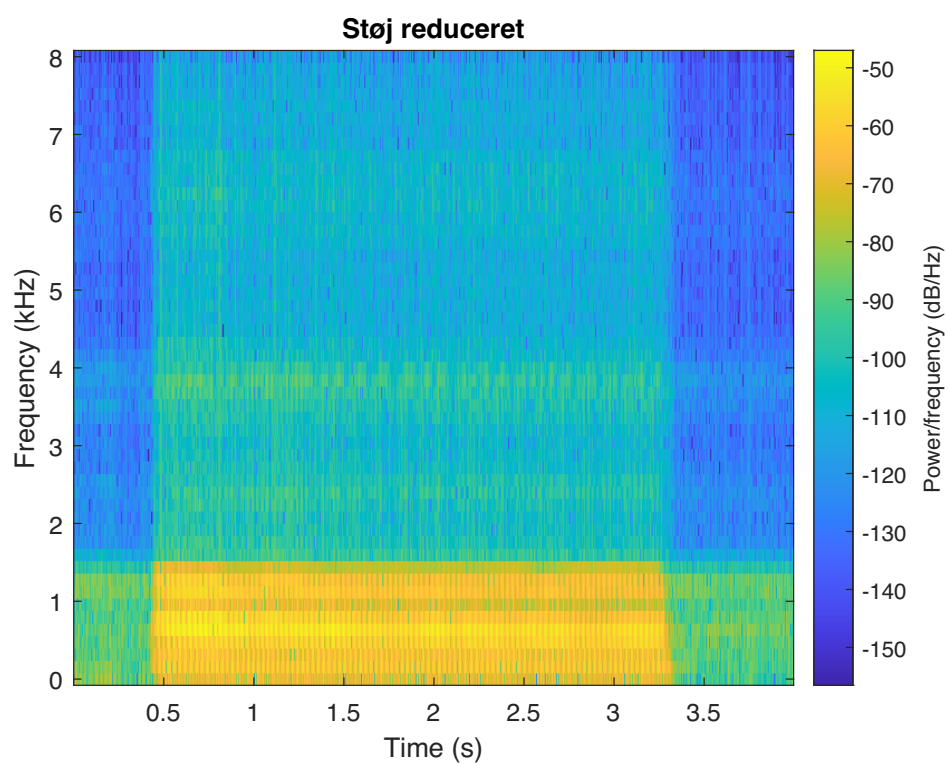
E | Delforsøg 3



Figur E.1: Spectrogram af lydclip med rigtig støj.



Figur E.2: Plot over singularværdier.



Figur E.3: Lydklip med rigtig støj i baggrunden, reduceret.